CORRECTION DS7

Exercice 1 : 13 points

Exercice 1

1. Dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on a :

$\mathrm{A}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ $\quad$ $\mathrm{B}(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$ $\quad$ $\mathrm{C}(4\ ;\ 4\ ;\ 0)$ $\quad$ $\mathrm{D}(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$

$\mathrm{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 8)$ $\quad$ $\mathrm{F}(4\ ;\ 0\ ;\ 4)$ $\quad$ $\mathrm{G}(4\ ;\ 4\ ;\ 4)$ $\quad$ $\mathrm{H}(0\ ;\ 4\ ;\ 8)$

I étant le milieu de [EF], on a $\mathrm{I}\left(\dfrac{x_\mathrm{E}+x_\mathrm{F}}{2}\ ;\ \dfrac{y_\mathrm{E}+y_\mathrm{F}}{2}\ ;\ \dfrac{z_\mathrm{E}+z_\mathrm{F}}{2}\right)$, soit $\mathrm{I}(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.

J étant le milieu de [AE], on a de même : $\mathrm{J}(0\ ;\ 0\ ;\ 4)$.

2. a. On a : $\overrightarrow{\mathrm{IG}}\ (2;\ 4;\ \text{-}2)$ $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}(-2\ ;\ 0\ ;\ -2)$.

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}} = -2+4-2=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 2+0-2=0$

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan (IGJ).

b. Une équation cartésienne d'un plan dont $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal est de la forme : $-x+y+z+d=0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que :

$$\begin{aligned}-x_\mathrm{G}+y_\mathrm{G}+z_\mathrm{G}+d=0 &\iff -4+4+4+d=0\\ &\iff d=-4\end{aligned}$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x+y+z-4=0$.

3. d est perpendiculaire à (IGJ), elle est donc dirigée par $\overrightarrow{n}$, et passe par H, elle admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-t \\ y=4+t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=8+t\end{cases}$

4. L le projeté orthogonal de H sur (IGJ) est l'intersection du plan (IGJ) et de la droite d qui passe par H et qui est orthogonale à ce plan. Un point de d a pour coordonnées $M_t(-t\ ;\ 4+t\ ;\ 8+t)$. Cherchons le paramètre t tel que M_t soit un point de (IGJ) :

$$\begin{aligned}M_t\in(\mathrm{IGJ}) &\iff -x_{M_t}+y_{M_t}+z_{M_t}-4=0\\ &\iff -(-t)+(4+t)+(8+t)-4=0\\ &\iff 3t+8=0\\ &\iff t=\frac{-8}{3}\end{aligned}$$

En remplaçant t par $\frac{-8}{3}$ on a les coordonnées de L $\left(\dfrac{8}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{16}{3}\right)$.

5. Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. On a $\overrightarrow{\mathrm{HL}}\ (\frac{8}{3}\ ;-\frac{8}{3}\ ;-\frac{8}{3})$

$\mathrm{HL}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Calculons : $\overrightarrow{\mathrm{IG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 2\times(-2)+4\times0+(-2)\times(-2)=-4+0+4=0$.

Le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. $V=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}_\mathrm{IGJ}\times\mathrm{HL}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\mathrm{IG}\times\mathrm{IJ}}{2}\times\mathrm{HL}$

Or $\mathrm{IG}=\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=\sqrt{8}\times\sqrt{3}$ et $\mathrm{IJ}=\sqrt{(-2)^2+0+2^2}=\sqrt{8}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{3}\times\sqrt{8}}{2}\times\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=\dfrac{64}{6}=\dfrac{32}{3}$

Exercice 2 : 7 points

1. L'avion n^o 1 parcourt la distance AO et l'avion n^o 2 parcourt la distance BC.
   On a : $\overrightarrow{OA}(\ 0;\ 200\ ;\ 0)$. De plus $B(-33\ ;\ 75\ ;\ 44)$ et $C(87\ ;\ 75\ ;\ -116)$ donc $\overrightarrow{BC}(120\ ;\ 0\ ;\ -16)$ Comme le repère est orthonormé, d'unité graphique 1 mètre, on a : $AO = \sqrt{0^2+200^2+0^2} = 200$ m et $BC = \sqrt{120^2+0^2+(-160)^2} = \sqrt{40\ 000} = 200$ m.
   Les deux avions parcourent donc la même distance (200 m), ils le font à la même vitesse (200 m/s), et donc ils vont mettre le même temps à le faire (1 s).

2. Donnons une représentation paramétrique des droites (OA) et (BC)
   Une représentation paramétrique de (OA) est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 200t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
   et une représentation paramétrique de (BC) est : $\begin{cases} x = -33+120s \\ y = 75 \\ z = 44-160s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$
   Les droites ont un point commun si le système : $\begin{cases} 0 = -33+120s \\ 200t = 75 \\ 0 = 44-160s \end{cases}$ a une solution.
   $$\begin{cases} 0 = -33+120s \\ 200t = 75 \\ 0 = 44-160s \end{cases} \iff \begin{cases} s = \dfrac{33}{120} \\ t = \dfrac{3}{8} \\ s = \dfrac{44}{160} \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} s = \dfrac{11}{40} \\ t = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$
   Le système a effectivement une unique solution, les deux trajectoires ont donc bien un point commun, qui est le point de paramètre $t = \dfrac{3}{8}$ sur [0A], qui est aussi le point de paramètre $s = \dfrac{11}{40}$ sur [BC], c'est le point de coordonnées $(0\ ;\ 75\ ;\ 0)$.
3. Les représentations paramétriques choisies sont aussi les équations horaires des deux avions (pour $t = 0$, on obtient le point de coordonnées $(50\ ;\ 0\ ;\ 0)$ sur le segment [OA], c'est le point O, donc le départ de l'avion 1. Pour $t = 1$, on obtient le point de coordonnées $(0\ ;\ 200\ ;\ 0)$, c'est-à-dire A, auquel l'avion arrive après 1 seconde.
   De même pour $s = 0$, l'avion n^o 2 est en B, et pour $s = 1$, l'avion arrive en C, là aussi après une seconde.
   Les deux avions n'arriveront pas au point commun de leurs trajectoires au même moment : l'avion n^o 1 y arrive au bout de $\dfrac{3}{8}$ s, quand l'avion n^o 2 y arrive au bout de $\dfrac{11}{40}$ s, soit $\dfrac{1}{10}$ de seconde après, en effet $\dfrac{3}{8} - \dfrac{11}{40} = \dfrac{15}{40} - \dfrac{11}{40} = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$.
   En un dixième de seconde, l'avion n^o 1 sera donc déjà 20 m plus loin, il est donc raisonnable de penser que les avions ne se percuteront pas (les avions de voltige aérienne ne sont pas de gros avions, généralement), mais ils passeront très proches l'un de l'autre (ce qui est le principe des démonstrations de voltige aérienne).