

**EXERCICE 1 11 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] - \infty ; 1[$  par  $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^-$  donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

$\mathcal{C}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$  donc par quotient  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

3. a. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] - \infty ; 1[$ , on a  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$

b. Pour tout  $x$  dans  $] - \infty ; 1[$ ,  $e^x$  et  $(x-1)^2$  sont strictement positifs, donc le signe de  $f'(x)$  est le même que le signe de  $(x-2)$ .

$x - 2 > 0 \iff x > 2$ , donc sur  $] - \infty ; 1[$ ,  $(x-2)$  est strictement négatif, donc  $f'(x)$  également.

|            |           |           |
|------------|-----------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $1$       |
| $f'(x)$    |           | -         |
| Var de $f$ | 0         | $-\infty$ |

4. On admet que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] - \infty ; 1[$ , on a  $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$

a. Pour étudier la convexité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $] - \infty ; 1[$ , on cherche le signe de  $f''(x)$

Comme, pour tout  $x$  dans  $] - \infty ; 1[$ , on a  $(x-1) < 0$  et donc  $(x-1)^3 < 0$  et  $e^x > 0$ , on en déduit que le signe de  $f''(x)$  est l'opposé du signe du trinôme :  $x^2 - 4x + 5$ .

Or, ce trinôme a un discriminant  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$  qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient de  $x^2$  est positif).

Finalement, la dérivée seconde  $f''$  est à valeurs strictement négatives sur  $] - \infty ; 1[$ , on en déduit que la fonction  $f$  est concave sur  $] - \infty ; 1[$ .

b. L'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = -2x - 1$$

c. En déduire que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] - \infty ; 1[$ , on a :  $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$

Puisque  $f$  est concave sur l'intervalle  $] - \infty ; 1[$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est donc située au-dessous de ses tangentes, en particulier la tangente  $T$ , sur cet intervalle.

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $] - \infty ; 1[$ , on a donc :  $f(x) \leq -2x - 1$  soit  $\frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$

Puis en multipliant par  $(x-1)$  qui est négatif sur cet intervalle on trouve  $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$

5. a. La fonction  $f$  est **continue** (car dérivable) et **strictement décroissante** sur  $] - \infty ; 1[$  (d'après 3b).

De plus **-2 est compris entre  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$**

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation  $f(x) = -2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $] - \infty ; 1[$

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$

$$0,31 < \alpha < 0,32$$

## EXERCICE 2 9 points

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x+1}$ .

1. Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$  donc la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ , comme  $\sqrt{x+1} + x \neq 0$

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x = \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$$

3. Pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0 \text{ car } \sqrt{x+1} + x \neq 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0 \text{ donc 2 racines réelles : } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ or } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ est négative donc sur}$$

$$\text{l'intervalle } [0; +\infty[ \text{ l'équation } f(x) = x \text{ admet pour unique solution : } \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est la fonction étudiée dans la partie A.

1. **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 5$

$u_0 \in [0; +\infty[$ , donc  $f(u_0)$  est définie et  $u_1 = f(u_0) = f(5) \approx 2,45$ . On a bien  $1 \leq u_1 \leq u_0$ .

**Hérédité** : on suppose que pour un certain entier  $n$  :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .

En appliquant la fonction  $f$  aux trois membres de cette inégalité, la croissance de  $f$  sur  $[0; +\infty[$  donne :

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \text{ or } 1 < \sqrt{2} \text{ d'où } 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

**Conclusion** : la proposition est vraie au rang 0, et est héréditaire donc pour tout entier naturel  $n$ , l'inégalité est vraie, soit :  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

2. D'après 3, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers  $\ell' \geq 1$

3.  $(u_n)$  est convergente  $\ell' \geq 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est une fonction continue sur  $[0; +\infty[$  donc  $\ell'$  est solution de l'équation  $f(x) = x$  et d'après A4, la suite  $(u_n)$  converge donc vers  $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

4. On considère le script Python ci-contre :

- a. `seuil(2)` va renvoyer l'indice du premier terme qui est à moins d'un centième de la limite  $\ell$ .

| i   | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| u   | 5      | 2,4495 | 1,8573 | 1,6903 | 1,6402 | 1,6249 |
| u-l | 3.3820 | 0.8315 | 0.2392 | 0,0723 | 0.0222 | 0.0068 |

La fonction renverra l'indice du premier terme pour lequel le test du while n'est pas satisfait : 5.

```
from math import *
def seuil(n):
    u = 5
    i = 0
    l = (1 + sqrt(5))/2
    while u-l >= 10**(-n):
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return i
```

- b. La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.  
Le premier terme de la suite qui est une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-4}$  près sera  $u_9$ .