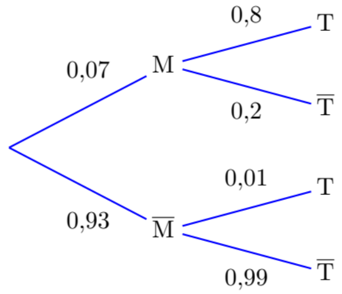
MATHEMATIQUES **CORRECTION DU D5**

EXERCICE 1 **8 points**



1. $P(M \cap T) = P(M)P_M(T) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$

2. Les événements M et M formant une partition de l'univers, on a, d'après la formule probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0{,}07 \times 0{,}8 + 0{,}93 \times 0{,}01 = 0{,}0653$$

La probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est de 0,0653.

3. $P_{\bar{T}}(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}056}{0{,}0653} \approx 0{,}8576$ à 10^{-4} près.

probabilité qu'elle soit malade sachant qu'elle a un test positif est 0,8576 à 10^{-4} près.

4. a) Tester une personne est une épreuve de Bernoulli de succès « le test est positif» de probabilité 0,0653. Il y a une répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (assimilé à un tirage avec remise) donc X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres *n* = 10 et *p* = 0,0653.

b) $P(X = 2) = \binom{10}{2} 0{,}0653^2\, 0{,}9347^8 \approx 0{,}1118$

La probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est d'environ 0,1118 à 10^{-4} près.

c) Calculer $P(3 \leq X \leq 7) \approx 0{,}0236$ à 10^{-4} près.

5. On veut déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Soit *n* le nombre de personnes testées. On cherche *n* pour que $P(X \geq 1) > 0{,}99$. On a

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ soit $1 - 0{,}9347^n > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01 > 0{,}9347^n$

Soit $u_n = 0{,}9347^n$ (u_n) est une suite géométrique décroissante car $0 < q = 0{,}9347 < 1$

Et $u_{68} = 0{,}9347^{68} \approx 0{,}0101$ $u_{69} = 0{,}9347^{69} \approx 0{,}0095$

Il faut donc tester 69 personnes dans ce pays pour qu'au moins une ait un test positif.

EXERCICE 2 **(12 points)**

1. a) $\frac{6-4x}{1-x} = \frac{-4x(-\frac{6}{4x}+1)}{-x(-\frac{1}{x}+1)} == 4\frac{-\frac{6}{4x}+1}{-\frac{1}{x}+1}$

- Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{6}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ $d'où$ $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{6}{4x} + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + 1 = 1$ puis, par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\frac{3}{4x}+1}{-\frac{1}{x}+1} = 1$

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} 4 = 4$ d'où par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6-4x}{1-x} = 4$

et $\lim\limits_{X\to4}(\sqrt{X}) = \sqrt{4}=2$ Par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x) = 2}$

- $\lim\limits_{x\to1} 6-4x = 2$, $\lim\limits_{x\to1-} 1-x = 0^+$ par quotient $\lim\limits_{x\to1-} \frac{6-4x}{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} (\sqrt{X}) = +\infty$
- Par composition : $\lim\limits_{x\to1-} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$

b) D'après les 2 limites obtenues au a), on a donc 2 asymptotes respectivement verticale et horizontale : les droites d'équation $x = 1$ et $y = 2$

2. a) Pour tout $x < 0$:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$-4 \leq \cos(x) - 3 \leq -2$$
$$-\frac{1}{4} \geq \frac{1}{\cos(x) - 3} \geq -\frac{1}{2}$$
car la fonction inverse est décroissante sur R-*
$$-\frac{x}{4} \leq \frac{x}{\cos(x) - 3} \leq -\frac{x}{2}$$
car on multiplie par x négatif

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{x}{4}\right) = +\infty$ et comme $g(x) \geq -\frac{x}{4}$ D'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g(x)} = +\infty$

3. $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ et comme $-\frac{1}{x^2}<h(x)<\frac{1}{x^2}$ D'après le théorème des gendarmes :
$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} h(x)=0}$

4. On considère une fonction h définie sur R par k$(x)\ = xe^{-x}$

Limite en $-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x\ \ =-\infty$ d'où par produit $\lim_{x\to-\infty} k(x)=-\infty$

Limite en $+\infty$

$k(x)=xe^{-x}=\frac{x}{e^x}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ d'après le cours d'où par inverse $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\ =0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} k(x)=0$

5. Calculer la dérivée des fonctions f,g et h définies et dérivables sur R dont on donne l'expression :

$f(x)=\sqrt{\boldsymbol{x^3+7x+5}}$
$f'(x)=\frac{3x^2+7}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$

$\boldsymbol{g}(x)=(\boldsymbol{5x-1})^{\boldsymbol{4}}$
$\boldsymbol{g}'(x)=4\times5(\boldsymbol{2x-1})^{\boldsymbol{3}}=20(\boldsymbol{2x-1})^{\boldsymbol{3}}$

$h(x)=e^{5x^2+2x}$
$h'(x)=(10x+2)e^{5x^2+2x}$