Terminale EDS *Mathématiques* CORRECTION DU D2

Exercice 1 8 points (1 + 1.5+ 1.5 + 2 + 2)

a) $u_n = \frac{-7}{2n^3+3}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} -7 = -7$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^3+3 = +\infty$ d'où par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) $u_n = \frac{5n+3}{-n+2} = \frac{n(5+\frac{3}{n})}{n(-1+\frac{2}{n})} == \frac{5+\frac{3}{n}}{-1+\frac{2}{n}}$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{3}{n} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\frac{2}{n} = -1$

d'où par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$

c) $u_n = -n+\sqrt{n} = n(-1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -1+\frac{1}{\sqrt{n}} = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

d'où par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ Comme -1≤ $(-1)^n \leq 1$, on a pour n> 0, $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

e) $u_n = n - \cos(n)$ $-1 \leq -\cos(n) \leq 1$ d'où $n-1 \leq n-\cos(n) = u_n$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ d'où d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2 **12 points** $v_0 = 0{,}7$. On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$.

1) **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Initialisation : Pour n = 0 $v_0 = 0{,}7$ *et* $v_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$ *donc* $v_0 \leq v_1 \leq 4$. donc la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose la proposition vraie pour un certain entier naturel n : $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

On veut montrer que $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$.

On sait que $u_{n+1} = 0{,}92u_n + 0{,}3$ et $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$

$d'où\ 0{,}92v_n \leq 0{,}92v_{n+1} \leq 0{,}92 \times 4 = 3{,}68$ (en multipliant par 0,92)

$0{,}92v_n + 0{,}3 \leq 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leq 3{,}98 < 4$ (en ajoutant 0,3)

On obtient alors $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire donc pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. Justifier que la suite (v_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

La suite (v_n) est **croissante et majorée** par 4 donc elle est convergente vers $\ell \leq 4$.

2) On désigne par (u_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n - 3{,}75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 3{,}75 = 0{,}92v_n + 0.3 - 3{,}75 = 0{,}92v_n - 3{,}45 = 0{,}92(v_n - 3{,}75) = 0{,}92\, u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison q= 0,92 et de premier terme $u_0 = v_0 - 3{,}75 = -3{,}05$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3{,}75 - 3{,}05 \times 0{,}92^n$.

Comme (u_n)est géométrique $u_n = u_0 \times q^n = -3{,}05 \times 0{,}92^n$ et $v_n = u_n + 3{,}75 = -3{,}05 \times 0{,}92^n + 3{,}75$

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Puisque $-1 < 0{,}92 < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}92^n = 0$ Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} -3{,}05 \times 0{,}92^n = 0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3{,}75$

3) À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes, car si la limite est 3,75 alors tout intervalle ouvert contenant 3,75 contiendra tous les termes à partir d'un certain rang. Notamment l'intervalle]3 ; 5[. Il existe donc un rang à partir duquel les termes de la suite seront dans l'intervalle]3 ; 5[, et donc la concentration en chlore dépassera strictement la limite supérieure de $3 mg\cdot L^{-1}$ recommandée par les piscinistes.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    v = 0.7
    while v<=s :
        n = n+1
        v = 0.92*v + 0.3
    return n
```

5) Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction alerte_chlore(3)? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

alerte_chlore(3) renvoie 17 car $v_{16} \approx 2{,}95 < 3$ et $v_{17} \approx 3{,}01 > 3$.

Dans le contexte de l'exercice, cela veut dire que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, donc le 6 juillet, le taux de chlore dans sa piscine serait trop élevé, par rapport aux recommandations des piscinistes.