EDS Terminale	Mathématiques CORRECTION DU D10

Exercice 1 : (2 points)

1) I $= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx = \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x+1}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2-1) = \frac{2}{3}$.

2) $\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(3x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\sin(0)\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{3} - 0\right) = -\frac{2}{3\pi}$

Exercice 2 : (8 points

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$.

1) **a)** $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 1dx = = 1(1-0) = 1$

b) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = [-ln(1+e^{-x})\,]_0^1 = -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e}}\right)$

$$I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e}}\right) = 1 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{e}}{2}\right)$$

2) Pour tout entier naturel n et pour tout x de [0 ;1], $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$ donc $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \geq 0$ (propriété de positivité de l'intégrale)

3) **a)** $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}dx =$
$\int_0^1 e^{-nx}dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

b) D'après a), $I_n + I_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$ et comme I_{n+1} est positive d'après 2) , on en déduit que $I_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

4) On sait que $0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) tend vers 0.

<u>Exercice 3</u> : (10 points)

$f(x) = (x + 2)e^{-x}$

1) **a)** • f(0)=2 donc les coordonnées du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$.

• Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f\ (x) = 0$.

On applique la règle du produit nul en sachant que $e^{-x} \neq 0$:

$$f\ (x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2.$$

Le point d'intersection de C avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.

2)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$ par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\forall x \in R, f\ (x) = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ d'où 'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est donc asymptote à C en $+\infty$

c) f est dérivable sur R car composée et produit de fonctions dérivables sur R

et, $\forall x \in R, f\ '(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = -(x + 1)e^{-x}$.

Comme $\forall x \in R \quad e^{-x} > 0, f\ '(x)$ est donc du signe de $-(x + 1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3) a) $\frac{1}{4}(f(0) + f(1) + f(2) + f(3)) \approx 1{,}642$

b)

```
def valapp(N) :
    S=0
    for k in range (0,N) :
        S=S+1/N*f(k/N)
    return S
```

3) Sur [0 ; 1], f est continue et positive d'après le tableau de variation, donc l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire, est donnée par

$A = \int_0^1 f\ (t)dt$.

On pose $u(x) = x + 2$ $\qquad u'(x) = 1$

$v(x) = -e^{-x}$ $\qquad v'\ (x) = e^{-x}$

u, v sont dérivables sur [0 ;1] et à dérivées continues sur cet intervalle, on applique donc la formule d'intégration par parties :

$A = [-(x + 2)e^{-x}\ ]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = [-(x + 2)e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = [-(x + 3)e^{-x}]_0^1 = -4e^{-1} + 3 = 3 - \frac{4}{e}$ u.a