BACCALAURÉAT BLANC 2020

– Série S –

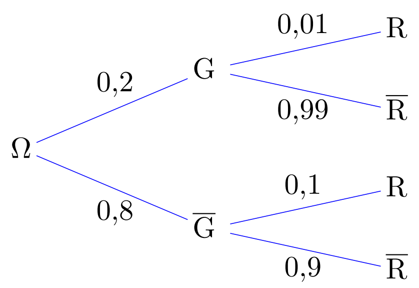
Mathématiques (spécialité)

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie A

1. **(a)** On traduit la situation par un arbre pondéré.



(b) On calcule

$$P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0{,}2 \times 0{,}01 = 0{,}002.$$

(c) On a de même

$$P(\overline{G} \cap R) = P(\overline{G}) \times P_{\overline{G}}(R) = 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08.$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(G \cap R) + P(\overline{G} \cap R) = 0{,}002 + 0{,}08 = 0{,}082.$$

(d) La probabilité demandée vaut

$$P_R(G) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}002}{0{,}082} \approx 0{,}024 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le coût d'entretien d'une voiture. On va chercher le coût moyen par voiture, soit l'espérance mathématique de X.

Il y a trois événements à considérer :

- G qui correspond à une voiture sous garantie dont la probabilité est 0,2 et qui nécessite 0 € de dépense ;
- $\overline{G} \cap \overline{R}$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui ne nécessite pas de réparation, dont la probabilité est $0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$ et qui nécessite 100 € de dépense ;
- $\overline{G} \cap R$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui nécessite une réparation, dont la probabilité est 0,08 et qui nécessite $100 + 400 = 500$ € de dépense.

La loi de probabilité de X est :

événement	G	$\overline{\mathrm{G}} \cap \overline{\mathrm{R}}$	$\overline{\mathrm{G}} \cap \mathrm{R}$
coût x_{i}	0 €	100 €	500 €
probabilité $p_{\mathrm{i}} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_{\mathrm{i}})$	0,2	0,72	0,08

On calcule l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum x_{\mathrm{i}} \times p_{\mathrm{i}} = 0 + 100 \times 0{,}72 + 500 \times 0{,}08 = 72 + 40 = 112.$$

Le coût d'entretien moyen par voiture est donc de 112 € ; il y a 2 500 voitures, ce qui fait une dépense totale de 112×2 500 = 280 000 €.

Conclusion : le budget de 250 000 € sera insuffisant.

Partie B

1. On a la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (car le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise) où le succès est le prélèvement d'un contrat de courte durée de probabilité $p = 0{,}23$. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès. Elle suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0{,}23)$.

2. Pour $\mathrm{Y} \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{avec} \quad q = 1 - p.$$

Avec la calculatrice on obtient, à 10^{-3} près :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = q^{10} = 0{,}77^{10} \approx 0{,}073\ ;$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant 2) \approx 0{,}414.$$

Exercice 2

Partie A

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x) + 1$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$, donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g, somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, est dérivable et, sur $[0, +\infty[$,

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x.$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0, +\infty[$. g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$.

3. On déduit le tableau des variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. **(a)** Sur $[0,+\infty[$, g est dérivable donc continue ; en outre elle est strictement décroissante et on a $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Il existe donc un unique réel $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (*On pouvait aussi invoquer le tableau de variation ci-dessus.*)

(b) La calculatrice donne $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

5. D'après les variations de g, on déduit le signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. La fonction A, quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$, est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas et, sur cet intervalle,

$$\mathrm{A}'(x) = \frac{4\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - 4x \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} = \frac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2} = \frac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}.$$

Comme $\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $\mathrm{A}'(x)$ est celui de $g(x)$. D'après la question précédente on a $\mathrm{A}'(x) > 0$ sur $[0,\alpha[$, $\mathrm{A}'(\alpha) = 0$ et $\mathrm{A}'(x) < 0$ sur $[\alpha,+\infty[$.

2. On en déduit les variations de la fonction : A est croissante sur $[0,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha,+\infty[$, $\mathrm{A}(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie C

On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ vaut

$$\mathscr{A}_{\text{OPMQ}} = \text{OP} \times \text{OQ} = x \times f(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^x + 1} = \mathrm{A}(x).$$

D'après l'étude de la fonction A, cette aire est donc maximale pour $x = \alpha$.

Exercice 3

Partie A : Étude d'exemples

1. Ici $z = \mathrm{i}$.

(a) $z = \mathrm{i}$ donc $z^2 = \mathrm{i}^2 = -1$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

(b) On place N_1 et P_1 sur le graphique donné en annexe. On remarque que, dans ce cas, les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = -3 < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

3. Ici $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) On remarque que

$$z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

Alors

$$z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

(b) On place les points $\mathrm{N}_2\left(z^2\right)$ et $\mathrm{P}_2\left(\frac{1}{z}\right)$ sur le graphique donné en annexe. On remarque que $\mathrm{N}_2 = \mathrm{P}_2$ et donc forcément dans ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Ici $z \in \mathrm{C}^*$ et $\mathrm{N}\left(z^2\right)$ et $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

1. Pour tout $z \neq 0$, on a, en développant,

$$\left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{z}.$$

2. Pour $z \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ a pour affixe $\left(z^2 - \dfrac{1}{z}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ a pour affixe $\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z^2 - \dfrac{1}{z} = k\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)$ ce qui équivaut, d'après le résultat précédent, à

$$\begin{aligned}
& \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = k\left(1 - \frac{1}{z}\right) \\
\iff & \left(z^2 + z + 1 - k\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0 \\
\iff & z^2 + z + 1 - k = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{1}{z} = 0 \\
\iff & z^2 + z + 1 = k \quad \text{ou} \quad z = 1.
\end{aligned}$$

Or, si $z = 1$, $z^2 + z + 1 = 3 \in \mathbf{R}$. Donc dans les deux cas $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$.

On a donc montré que N et P, définis ci-dessus, sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels, on a

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= (x + \mathrm{i}y)^2 + x + \mathrm{i}y + 1 \\ &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + x + \mathrm{i}y + 1 \\ &= x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y). \end{aligned}$$

4. **(a)** Les points A, N et P soient alignés si, et seulement si, $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$, ce qui donne

$$2xy + y = 0 \iff y(2x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

Les solutions appartiennent donc aux droites d'équations $y = 0$ et $x = -\dfrac{1}{2}$.

(b) Or z doit être non nul, donc l'ensemble cherché est l'axe des réels privé de l'origine et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. On trace cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice 4

Partie A

1.
- Tout diviseur commun de a et de b est un diviseur commun de $a - b$ et de b ;
- Tout diviseur commun de $a - b$ et de b est un diviseur commun de $(a - b) + b = a$.

Les diviseurs communs de a et b sont donc les diviseurs communs de $a - b$ et de b, donc leur plus grand diviseur commun est le même.

2. On applique le résultat précédent de manière répétée :

$$\begin{aligned} \mathrm{pgcd}(4^3 - 1\,;4^2 - 1) &= \mathrm{pgcd}\left((4^3 - 1) - (4^2 - 1)\,;4^2 - 1\right) \\ &= \mathrm{pgcd}(4^3 - 4^2\,;4^2 - 1) = \mathrm{pgcd}(48\,;15) \\ &= \mathrm{pgcd}(33\,;15) = \mathrm{pgcd}(18\,;15) = \mathrm{pgcd}(3\,;15) \\ &= 3. \end{aligned}$$

3. L'algorithme complété : voir en annexe.

Partie B

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

On admet que pour tout entier naturel n non nul, u_n est un entier naturel non nul.

1. On a

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 4u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 4u_n \\ u_{n+1} + 0u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AU_n,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide de la calculatrice on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. On montre par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$.

- Initialisation. On a $D = P^{-1}AP$, d'où, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} : $PD = AP$; puis $PDP^{-1} = A$. Ainsi la relation est vraie au rang 1.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, avec $n \leqslant 1$ et supposons que, pour ce n particulier on ait $A^n = PD^nP^{-1}$.
  Alors en multipliant à gauche par P^{-1}, puis à droite par P, on obtient $P^{-1}A^nP = D^n$. Multiplions chaque membre par $D = P^{-1}AP$: $P^{-1}APP^{-1}A^nP = D^{n+1}$; or $PP^{-1} = I_2$, d'où $P^{-1}AA^nP = D^{n+1}$ et en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} : $PP^{-1}A^{n+1}PP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, soit finalement :

  $$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

  La relation est donc vraie au rang $n + 1$.
- Conclusion. La relation est vraie au rang 1 et, si elle est vraie à un rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang $n+1$, donc, d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. La matrice D est diagonale donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Or $A^n = PD^nP^{-1}$. On calcule

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4^{n+1} \\ 1 & 4^n \end{pmatrix},$$

puis

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4^{n+1} \\ 1 & 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{4^{n+1}}{3} & \frac{4}{3} - \frac{4^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{4^n}{3} & \frac{4}{3} - \frac{4^n}{3} \end{pmatrix}.$$

5. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3} & \frac{4}{3}-\frac{4^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{3}+\frac{4^{n}}{3} & \frac{4}{3}-\frac{4^{n}}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3} & \frac{4}{3}-\frac{4^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{3}+\frac{4^{n}}{3} & \frac{4}{3}-\frac{4^{n}}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{4^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{3}+\frac{4^{n}}{3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Or $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ donc $u_n = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4^n}{3}$.

6. **(a)** D'après le résultat précédent :

$$4u_n + 1 = 4\left(-\frac{1}{3} + \frac{4^n}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 + \frac{4^{n+1}}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{4^{n+1}}{3} = u_{n+1}.$$

On a donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

(b) D'après la partie A,

$$\begin{aligned} &\operatorname{pgcd}(u_{n+1}, u_n) \\ =\ &\operatorname{pgcd}(4u_n+1, u_n) \\ =\ &\operatorname{pgcd}(3u_n+1, u_n) \\ =\ &\operatorname{pgcd}(2u_n+1, u_n) \\ =\ &\operatorname{pgcd}(u_n+1, u_n) \\ =\ &\operatorname{pgcd}(1, u_n) = 1. \end{aligned}$$

Donc u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

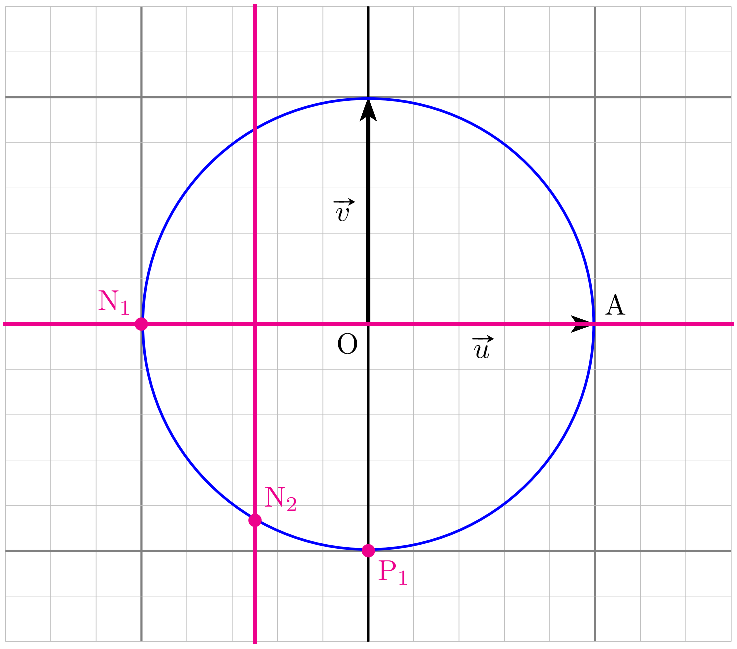
(c) On a démontré, à la question **5**, que $u_n = -\frac{1}{3} + \frac{4^n}{3}$ soit, en multipliant chaque membre par 3 : $3u_n = -1 + 4^n$; par conséquent $3u_{n+1} = -1 + 4^{n+1}$. On a donc $\operatorname{pgcd}(4^{n+1} - 1\,;\, 4^n - 1) = \operatorname{pgcd}(3u_{n+1}, 3u_n)$. Comme $\operatorname{pgcd}(u_{n+1}, u_n) = 1$,

$$\operatorname{pgcd}(3u_{n+1}, 3u_n) = 3\times \operatorname{pgcd}(u_{n+1}, u_n) = 3\times 1 = 3.$$

Deux termes consécutifs de la suite $(4^n - 1)_{n\in\mathbf{N}}$ ont pour PGCD 3.

ANNEXE

Exercice 3



Exercice 4

$a \leftarrow 4^3 - 1$
$b \leftarrow 4^2 - 1$
tant que $a \neq b$ **faire**
  si $a > b$ **alors**
    $a \leftarrow a - b$
  sinon
    $b \leftarrow b - a$
  fin si
fin tant que