BACCALAURÉAT BLANC 2020

– Série S –

Mathématiques (obligatoire)

Durée de l'épreuve : 4 h

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants,
ainsi que d'une annexe à rendre avec la copie.
Les 3 premiers exercices sont communs aux spécialistes et non spécialistes.

Exercice 1

5 points

Partie A

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique Mathématiques (obligatoire)de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien.
On dispose des données suivantes :

- 20 % des voitures sont sous garantie ;
- pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire ;
- pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire.

On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les événements suivants :

- G : « la voiture est sous garantie » ;
- R : « une réparation est nécessaire ».

1. **(a)** Traduire la situation par un arbre pondéré.

(b) Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.

(c) Justifier que $P(R) = 0{,}082$.

(d) Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation.
Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile.

L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes :

- si la voiture est encore sous garantie, l'entretien et les éventuelles réparations sont gratuites ;
- si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 € et, si une réparation est nécessaire, il faut rajouter 400 €.

Sachant que son parc automobile compte 2 500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures ?

On pourra introduire la variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Partie B

La société de location propose à ses clients deux contrats de locations : un contrat de courte durée (inférieure ou égale à deux jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours). La probabilité que le client choisisse un contrat de courte durée est de 0,23. On prélève 10 contrats de location parmi les contrats signés. La quantité de clients est suffisamment importante pour que le prélèvement puisse être assimilé à un tirage successif avec remise. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de contrats de courte durée parmi les dix contrats prélevés.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire Y ? Justifier. Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité des événements suivants (on donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près) :

A : « Tous les contrats sont de longue durée. »
B : « Il y a au moins trois contrats de courte durée. »

Exercice 2

5 points

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = -x\mathrm{e}^x$; en déduire le tableau de variations de g.

3. **(a)** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $\mathrm{A}(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

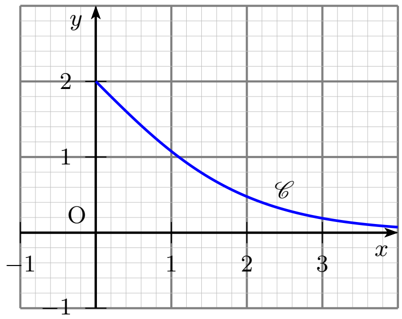
1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $\mathrm{A}'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie **A**.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0, +\infty[$.

Partie C

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Voir le graphique ci-dessous.



Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x, f(x))$;
- P le point de coordonnées $(x, 0)$;
- Q le point de coordonnées $(0, f(x))$.

Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
On rappelle que le réel α a été défini dans la partie **A**.

Exercice 3

5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés. Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A : Étude d'exemples

1. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.

(a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

(b) Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. Un deuxième exemple

Dans cette question, on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

(b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\dfrac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, $\vec{\mathrm{U}}$ est un vecteur non nul et $\vec{\mathrm{V}}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{\mathrm{U}}}$ et $z_{\vec{\mathrm{V}}}$, les vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{\mathrm{V}}} = k z_{\vec{\mathrm{U}}}$.
En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y)$.

4. **(a)** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

(b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice 4

5 points

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	I3	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = 3 \times 2^n + n - 2.$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le rang du 1$^{\text{er}}$ terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 3