BACCALAURÉAT BLANC 2020

– Série S –

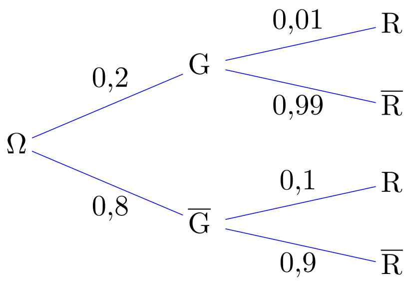
Mathématiques (obligatoire)

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie A

1. **(a)** On traduit la situation par un arbre pondéré.



(b) On calcule

$$\text{P}(\text{G} \cap \text{R}) = \text{P}(\text{G}) \times \text{P}_{\text{G}}(\text{R}) = 0{,}2 \times 0{,}01 = 0{,}002.$$

(c) On a de même

$$\text{P}(\overline{\text{G}} \cap \text{R}) = \text{P}(\overline{\text{G}}) \times \text{P}_{\overline{\text{G}}}(\text{R}) = 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08.$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\text{P}(\text{R}) = \text{P}(\text{G} \cap \text{R}) + \text{P}(\overline{\text{G}} \cap \text{R}) = 0{,}002 + 0{,}08 = 0{,}082.$$

(d) La probabilité demandée vaut

$$\text{P}_{\text{R}}(\text{G}) = \frac{\text{P}(\text{G} \cap \text{R})}{\text{P}(\text{R})} = \frac{0{,}002}{0{,}082} \approx 0{,}024 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le coût d'entretien d'une voiture. On va chercher le coût moyen par voiture, soit l'espérance mathématique de X.

Il y a trois événements à considérer :

- G qui correspond à une voiture sous garantie dont la probabilité est 0,2 et qui nécessite 0 € de dépense ;
- $\overline{\text{G}} \cap \overline{\text{R}}$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui ne nécessite pas de réparation, dont la probabilité est $0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$ et qui nécessite 100 € de dépense ;
- $\overline{\text{G}} \cap \text{R}$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui nécessite une réparation, dont la probabilité est 0,08 et qui nécessite $100 + 400 = 500$ € de dépense.

La loi de probabilité de X est :

événement	G	$\overline{\mathrm{G}} \cap \overline{\mathrm{R}}$	$\overline{\mathrm{G}} \cap \mathrm{R}$
coût x_i	0 €	100 €	500 €
probabilité $p_\mathrm{i} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_\mathrm{i})$	0,2	0,72	0,08

On calcule l'espérance

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum x_\mathrm{i} \times p_\mathrm{i} = 0 + 100 \times 0{,}72 + 500 \times 0{,}08 = 72 + 40 = 112.$$

Le coût d'entretien moyen par voiture est donc de 112 € ; il y a 2 500 voitures, ce qui fait une dépense totale de $112 \times 2\,500 = 280\,000$ €.

Conclusion : le budget de 250 000 € sera insuffisant.

Partie B

1. On a la répétition de $n = 10$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (car le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise) où le succès est le prélèvement d'un contrat de courte durée de probabilité $p = 0{,}23$. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès. Elle suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0{,}23)$.

2. Pour $\mathrm{Y} \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{avec} \quad q = 1 - p.$$

Avec la calculatrice on obtient, à 10^{-3} près :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = q^{10} = 0{,}77^{10} \approx 0{,}073\ ;$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant 2) \approx 0{,}414.$$

Exercice 2

Partie A

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1 - x) + 1$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$, donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g, somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, est dérivable et, sur $[0, +\infty[$,

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x.$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0, +\infty[$. g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$.

3. On déduit le tableau des variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. **(a)** Sur $[0,+\infty[$, g est dérivable donc continue ; en outre elle est strictement décroissante et on a $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Il existe donc un unique réel $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (*On pouvait aussi invoquer le tableau de variation ci-dessus.*)

(b) La calculatrice donne $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

5. D'après les variations de g, on déduit le signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. La fonction A, quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$, est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas et, sur cet intervalle,

$$\mathrm{A}'(x) = \frac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right) - 4x\times\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{4\left(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} = \frac{4g(x)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}.$$

Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $\mathrm{A}'(x)$ est celui de $g(x)$. D'après la question précédente on a $\mathrm{A}'(x) > 0$ sur $[0,\alpha[$, $\mathrm{A}'(\alpha) = 0$ et $\mathrm{A}'(x) < 0$ sur $[\alpha,+\infty[$.

2. On en déduit les variations de la fonction : A est croissante sur $[0,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha,+\infty[$, $\mathrm{A}(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie C

On sait que $x \geqslant 0$, donc l'aire du rectangle OPMQ vaut

$$\mathscr{A}_{\text{OPMQ}} = \text{OP}\times\text{OQ} = x\times f(x) = \frac{4x}{\mathrm{e}^x+1} = \mathrm{A}(x).$$

D'après l'étude de la fonction A, cette aire est donc maximale pour $x = \alpha$.

Exercice 3

Partie A : Étude d'exemples

1. Ici $z = \mathrm{i}$.

(a) $z = \mathrm{i}$ donc $z^2 = \mathrm{i}^2 = -1$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

(b) On place N_1 et P_1 sur le graphique donné en annexe. On remarque que, dans ce cas, les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = -3 < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

3. Ici $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) On remarque que

$$z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

Alors

$$z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

(b) On place les points $N_2\left(z^2\right)$ et $P_2\left(\frac{1}{z}\right)$ sur le graphique donné en annexe. On remarque que $N_2 = P_2$ et donc forcément dans ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Ici $z \in \mathrm{C}^*$ et $\mathrm{N}\left(z^2\right)$ et $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

1. Pour tout $z \neq 0$, on a, en développant,

$$\left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{z}.$$

2. Pour $z \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ a pour affixe $\left(z^2 - \dfrac{1}{z}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ a pour affixe $\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $z^2 - \dfrac{1}{z} = k\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)$ ce qui équivaut, d'après le résultat précédent, à

$$\begin{aligned}
& \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = k\left(1 - \frac{1}{z}\right) \\
\iff & \left(z^2 + z + 1 - k\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0 \\
\iff & z^2 + z + 1 - k = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{1}{z} = 0 \\
\iff & z^2 + z + 1 = k \quad \text{ou} \quad z = 1.
\end{aligned}$$

Or, si $z = 1$, $z^2 + z + 1 = 3 \in \mathbf{R}$. Donc dans les deux cas $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$.

On a donc montré que N et P, définis ci-dessus, sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels, on a

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= (x + \mathrm{i}y)^2 + x + \mathrm{i}y + 1 \\ &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + x + \mathrm{i}y + 1 \\ &= x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y). \end{aligned}$$

4. **(a)** Les points A, N et P soient alignés si, et seulement si, $z^2 + z + 1 \in \mathbf{R}$, ce qui donne

$$2xy + y = 0 \iff y(2x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

Les solutions appartiennent donc aux droites d'équations $y = 0$ et $x = -\dfrac{1}{2}$.

(b) Or z doit être non nul, donc l'ensemble cherché est l'axe des réels privé de l'origine et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. On trace cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice 4

Partie A : Conjectures

1. Les formules qu'il faut saisir dans les cellules B3 et C3 pour obtenir les termes des deux suites :

- en B3 : =2*B2-A2+3
- en C3 : =2*C2 ou (= 2^A3)

2. D'après les résultats du tableur, on conjecture que

- la limite de (u_n) semble être $+\infty$,
- la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ semble être 3.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3\times 2^n + n - 2$.

- Initialisation. $u_0 = 1$ et $3\times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.
- Hérédité. Supposons que, pour un entier $n \in \mathrm{N}$ particulier, on ait $u_n = 3\times 2^n + n - 2$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - n + 3 \\ &= 2\left(3\times 2^n + n - 2\right) - n + 3 \\ &= 3\times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 \\ &= 3\times 2^{n+1} + n - 1 \\ &= 3\times 2^{n+1} + (n+1) - 2. \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion. La relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de la récurrence on a donc démontré que pour tout naturel n, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. On détermine la limite de la suite (u_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$, donc par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

3. À la calculatrice, on détermine le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million : $u_{18} = 786\,448 < 1\,000\,000$ et $u_{19} = 1\,572\,881 > 1\,000\,000$. Donc 19 est donc le rang du premier terme supérieur à un million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. On montre que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n},$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} = \left(3 + \frac{n-1}{2^{n+1}}\right) - \left(3 + \frac{n-2}{2^n}\right) = \frac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}} = \frac{-n+3}{2^{n+1}}$$

qui est du signe de $-n+3$, donc négatif ou nul si $n \geqslant 3$.

Ceci prouve que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Avec l'encadrement donné, on en déduit que pour $n \geqslant 4$,

$$3 - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ (car $2 > 1$), alors, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3.$$

ANNEXE

Exercice 3