BACCALAURÉAT BLANC 2017

– Série S –

Mathématiques (obligatoire)

Durée de l'épreuve : 4 h

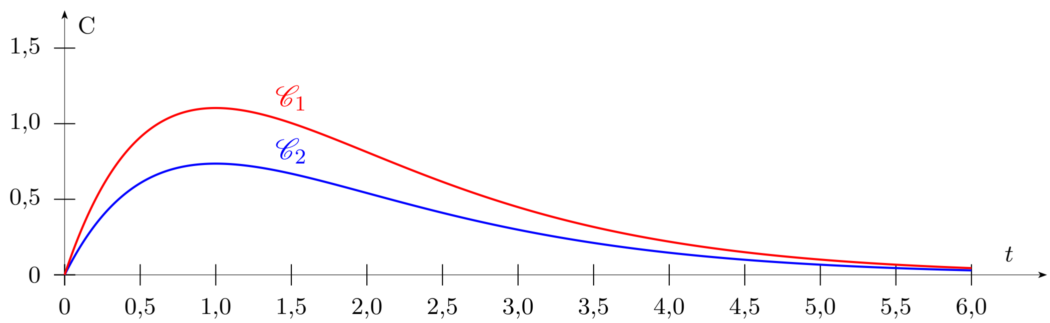
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants ;
les trois premiers sont communs aux spécialistes et non-spécialistes.

Exercice 1

7 points

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps.



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on note C′ sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
   D'après le graphique ci-dessus, à quel instant cette vitesse est-elle maximale ? Justifier.
   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{A}te^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   (b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B : Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(t) = 2te^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

(a) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2te^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5
	p prend la valeur 0,25
	C prend la valeur 0,21
Traitement :	Tant que $\mathrm{C} > 5\times10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t+p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Pourquoi peut-on affirmer que cet algorithme s'arrête ?

(b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme (les étapes 1 et 2 uniquement). Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée à la fin par cet algorithme ?

Exercice 2

4 points

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de a.
   (b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. On considère ici que M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (a) Justifier que son affixe z peut s'écrire sous la forme $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec θ un réel.
   (b) Montrer que dans ce cas $f(z)$ est un nombre réel.
4. (a) Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (0, 0)$. Exprimer $f(z)$ sous forme algébrique en fonction de x et de y.
   (b) Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 3

4 points

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. (a) Quelle est la probabilité de l'événement $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{S}}$?

   (b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Exercice 4

5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).
   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1, 0]$ et vérifie l'égalité $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.
   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?