Réponses - Exercice 1 **6 points**
1. $u_1 = 1500 \times 0{,}95 + 250 = 1675$.
2. Un baisse de 5% correspond à un coefficient multiplicateur de 0,95 : le nombre d'individus de l'année précédente est donc multiplié par 0, 95 On ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux individus, donc pour tout naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 250$.
3. suite(10) donne le nombre d'individus au bout de 10 ans soit en 2031; une calculatrice donne u≈2904.
4. a) **Initialisation :** Pour n = 0 u_0 =1500 $\leq$ 5000 donc la propriété est vraie au rang 0. **Hérédité :** On suppose la proposition vraie pour un certain n : $u_n \leq 5000$. On veut montrer que $u_{n+1} \leq 5000$. $u_n \leq$ 5000 En multipliant par 0,95 on obtient $0{,}95u_n \leq 4750$ Puis en ajoutant 250 : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 250 \leq 4750 + 250 = 5000$ La proposition est donc vraie au rang n+1. **Conclusion :** La proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire. Pour tout n$\in \mathbb{N}$ $u_n \leq 5000$
b) Pour tout entier naturel n on a : $$u_{n+1} - u_n = 0,95u_n + 250 - u_n = -0{,}05u_n + 250 = -0{,}05(u_n - 5000)$$ Or d'après a) $u_n - 5000$ est négatif et comme -0,05 est aussi négatif on obtient $u_{n+1} - u_n \geq 0$ La suite (u_n) est donc croissante.
c) convergence de la suite (u_n) est croissante et majorée donc la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 5000$ pour tout entier naturel n. a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 5000 = 0{,}95u_n + 250 - 5000 = 0{,}95u_n - 4750$ $= 0{,}95(u_n - 5000) = 0{,}95v_n$ La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme $v_0 = 1500 - 5000 = -3500$.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n = -3500 \times 0{,}95^n$ et $u_n = v_n + 5000 = 5000 - 3500 \times 0{,}95^n$.
c) Comme $-1 < 0{,}95 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$ donc par produit puis par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5000$ A long terme, le nombre d'individus tendra à se stabiliser à 5000

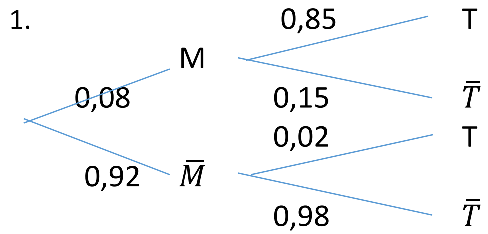
6.

```
def seuil() :
    n = 0
    u= 1500
    while u<=3500 :
        n = n + 1
        u=0.95*u+250
    return n
```

```
def seuil() :
    n = 0
    u= 1500
    while u<=3500 :
        n=n+1
        u=5000-3500*0.95**n
    return n
```

Réponses - Exercice 2 4 points

1.



2. a) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}08 \times 0{,}85 = 0{,}068$

La probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif est **0,068.**

b) $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) = 0{,}068 + 0{,}92 \times 0{,}02 = \mathbf{0{,}0864.}$

Formule des probabilités totales

3. $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}068}{0{,}0864} \approx \mathbf{0{,}7870.}$

4. a) Choisir une personne est une épreuve de Bernoulli de succès « le test est positif » de probabilité 0,0864. Il y a une répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres *n* = 10 et *p* = 0,0864.

b) $P(X = 2) = \binom{10}{2} 0{,}0864^2 \times 0{,}9136^8$ ≈ **0,1630.** La probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif est d'environ 0,1630.

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \mathbf{0{,}0488}$

La probabilité pour qu'au moins trois personnes aient un test positif est d'environ 0,0488.

Réponses - Exercice 3 5 points

1. **Question 1 :** Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ? b) **N(−3 ; −4 ; 6)**

Question 2 : Une représentation paramétrique de la droite (BC) est : **c)** $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Question 3 : Les droites droite Δ et la droite (AD) sont : **c) strictement parallèles**

Question 4 : Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est : **b)** $2x + y - z + 1 = 0$

Question 5 : On donne les points E(1;2;1), F(0;−1;3) et G(−4;2;1).

Soit M le point tel que $\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$. Les coordonnées de M sont : **d) (−6;−4;5)**

Réponses - Exercice 4 **5 points**

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x-1}=+\infty$

Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2. **a)** Pour tout x de $[0\,;+\infty[$

$f\,'(x)=\ -e^{2x-1}+2(2\ -\ x)e^{2x-1}=e^{2x-1}(-1+4-2x)=e^{2x-1}(-2x+3)$.

b) Pour tout x, $e^{2x-1}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de$-2x+3$,

x	0		1,5		$+\infty$
$f\,'(x)$		+	0	-	
Var de f	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$0{,}5e^{2}$	$\searrow$	$-\infty$

3. $f(x)=0 \Leftrightarrow\ (2\ -\ x)e^{2x-1}=0 \Leftrightarrow x=2$ car Pour tout x, $e^{2x-1}\neq 0$

L'équation $f(x)\ =\ 0$ admet donc une unique solution α sur $[0;+\infty[$. α =2.

4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

D'après le deux questions précédentes ,

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	

5. Pour tout x de $[0\,;+\infty[$

$f\,''(x)=\ -2e^{2x-1}+2(-2x+3)e^{2x-1}=e^{2x-1}(-2-4x+6)=e^{2x-1}(-4x+4)$.

Pour tout x, $e^{2x-1}>0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de$-4x+4$

x	0		1		$+\infty$
$f\,''(x)$		+	0	-	

Donc f est convexe sur [0 ;1] et concave sur [1 ;+∞[.

Il y a un seul point d'inflexion le point de coordonnées $(1\,;e)$

$$f(0{,}5)=\ 1{,}5\ et\ f\,'(0{,}5)=2$$

Une équation de la T tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0,5 est donc

$$y=2(x-0{,}5)+1{,}5\ soit\ y=2x+0{,}5$$

7. $(2\ -\ x)e^{2x-1}-2x-0{,}5=f(x)-(2x+0{,}5)$

Or d'après 5), la fonction est convexe sur [0 ;1] donc la courbe C_f est au-dessus de toutes ses tangentes donc en particulier de T, le signe de $f(x)-(2x+0{,}5)$ est donc positif sur [0,1].