UNE CORRECTION DU BAC BLANC 2017- SUJET SPECIALITE

Exercice 1

Partie A

1. D'après le graphique, $C'(t)$ est donné par la « pente » de la tangente à la courbe C au point d'abscisse t. Il semblerait qu'à l'instant $t = 0$, le coefficient directeur des tangentes soit le plus grand. Ainsi, la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang semble maximale pour $t = 0$.

2. « Une personne de plus faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool ». Pour la courbe C_1, la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est plus importante à l'instant $t = 0$. En effet, graphiquement pour $t = 0$, le coefficient directeur de la tangente à C_1 est supérieur au coefficient directeur de la tangente à C_2. On peut donc penser que la courbe C_1 correspond à celle de la personne la moins corpulente et donc, la courbe C_2 correspond à celle de la personne la plus corpulente .

3. (a) La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

On a : $f\ '(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$. Soit : $f\ '(t) = Ae^{-t}(1-t)$. Ainsi, $f\ '(0) = A$.

(b) $f\ '(0) = A$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0. Or, « Une personne de plus faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool ».

Donc, plus A est grand, plus la personne subit plus vite les effets de l'alcool, plus la personne est donc de faible corpulence.

L'affirmation est donc Fausse.

Partie B - un cas particulier

1. On veut étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = 2te^{-t}$. C'est la fonction considérée dans la partie A. 3. avec $A = 2$.

On a donc : $f\ '(t) = 2e^{-t}(1-t)$.

Le signe de $f\ '(t)$ dépend de celui de $1-t$ puisque $2e^{-t} > 0, \quad \forall t \geq 0$.

On a donc le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{2}{e}$.

2. D'après l'étude des variations, la concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1heure après l'absorption. Elle est environ égale à 0,74 g/l.

3. D'après le cours, $\lim\limits_{t \to +\infty} (\dfrac{e^t}{t}) = +\infty$. Ici, $f(t) = 2 \times \dfrac{t}{e^t}$. Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{e^t}{t}\right)^{-1} = 0$,

D'où : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Ce qui signifie qu'au fil du temps, la concentration d'alcool dans le sang diminue et redevient proche de 0.

4. (a)
- La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. $0,2 \in [0\ ;\ \frac{2}{e}]$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un seul réel $t_1 \in [0\ ;\ 1]$ tel que $f(t_1) = 0,2$.
- La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$. $0,2 \in]0\ ;\ \frac{2}{e}]$. D'après l'extension du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un seul réel $t_2 \in [1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(t_2) = 0,2$.

(b) On cherche la valeur de t_2 afin de répondre à la question.

En utilisant la méthode « du balayage », on obtient :

à l'unité..... $f(3) \approx 0,298$ et $f(4) \approx 0,147$ D'où : $3 < t_2 < 4$.

au dixième....$f(3,5) \approx 0,211$ et $f(3,6) \approx 0,197$ D'où : $3,5 < t_2 < 3,6$.

au centième.... $f(3,57) \approx 0,201$ et $f(3,58) \approx 0,199$ D'où : $3,57 < t_2 < 3,58$.

Ce qui correspond à environ plus de 3 heures et 34 minutes.

C'est à dire que Paul devra attendre 3 heures et 35 minutes pour pouvoir prendre le volant en toute légalité.

5. (a) La concentration minimale détectable est égale à 5×10^{-3}g/L.

On sait que : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Par définition, cela signifie que :

Pour tout intervalle ouvert I contenant 0, il existe un réel T tel que : pour tout $t > T$, $f(t) \in I$.

En particulier pour $I =]-\infty\ ;\ 5 \times 10^{-3}[$, il existe donc un réel T à partir duquel $f(t) < 5 \times 10^{-3}$.

(b)

	Initialisation	Etape 1	Etape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée à la fin de cet algorithmle est la valeur de T à la précision p déterminée précédemment, c'est à dire la valeur à partir de laquelle la concentration d'alcool n'est plus détectable.

Exercice 2

1. (a) A est le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a ainsi, d'après le cercle trigonométrique et les valeurs particulières connues :

$a = cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Soit : $a = e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

(b) Déterminons la forme algébrique de $f(a) = a + \frac{1}{a}$.

On a : $f(a) = e^{\frac{3\pi}{4}i} + \frac{1}{e^{\frac{3\pi}{4}i}} = e^{\frac{3\pi}{4}i} + e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 2 \times cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

2. On veut résoudre l'équation : $f(z) = 1$.

$f(z) = 1$ équivaut à : $z + \dfrac{1}{z} = 1$. Ce qui est équivalent à : $\begin{cases} z^2 - z + 1 = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$

On a une équation de degré 2 d'inconnue z à coefficients réels et il est clair que $z = 0$ n'est pas une solution.

$\Delta = -3 < 0$.

Donc, ce trinôme possède deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

3. (a) Tout nombre complexe z admet une écriture exponentielle : $\mid z \mid \times e^{i\theta}$ où θ est un réel.

Or, z est l'affixe d'un point M appartenant au cercle C de centre O de rayon 1, d'où : $\mid z \mid = 1$.

On a donc : $z = e^{i\theta}$ avec θ, un réel.

(b) $f(z) = e^{i\theta} + \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$; Or, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \times cos\,(\theta)$,

Soit : $f(z) = 2 \times cos\,(\theta)$. Dans ce cas, $f(z)$ est un nombre réel.

4. (a) Posons : $z = x + iy$, avec x et y réels et $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0)$.

Exprimons alors sous forme algébrique $f(z)$. $f(z) = x + iy + \dfrac{1}{x+iy}$. et $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0)$.

On a donc : $f(z) = x+iy+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$, $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0)$. Soit encore : $f(z) = \dfrac{x(x^2+y^2+1)+iy(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}$.

La forme algébrique de $f(z)$ est donc donnée par l'expression :

$$\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} + i\frac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2} \text{ et } (x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0).$$

(b) On cherche l'ensemble des points $M(z)$ du plan pour lesquels $f(z)$ est un nombre réel.

$f(z) \in \mathbb{R}$ équivaut à $Im(f(z)) = 0$; c'est à dire : $\begin{cases} y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x,\ y) \neq (0\ ;\ 0) \end{cases}$

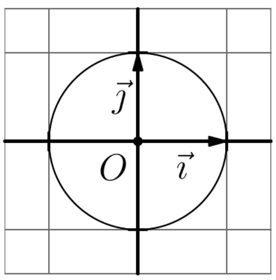
Soit : $y = 0$ ou $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0)$.

$y = 0$ représente l'ensemble des points situés sur l'axe des abscisses, on enlève l'origine O du repère, c'est à dire le point $(0\ ;\ 0)$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ représente l'ensemble des points du cercle de centre O et de rayon 1.

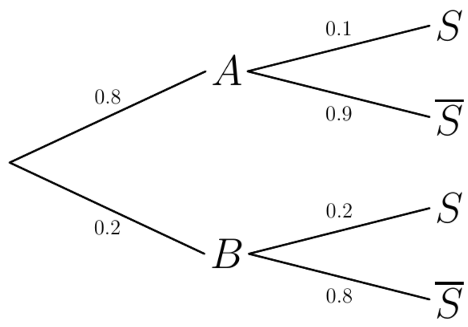
L'ensemble des points M cherché est donc la réunion de l'axe des abscisses, l'origine O du repère exclu, et le cercle de centre O de rayon 1.

Représentation de l'ensemble des points M tel que $f(z)$ soit un nombre réel.



Exercice 3

Partie A 1. L'arbre pondéré qui résume la situation :



2. (a) Calcul de $p(B \cap \overline{S}) = p(B) \times p_B(\overline{S}) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$.

(b) Les événements A et B forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a donc : $p(\overline{S}) = p(A \cap \overline{S}) + p(B \cap \overline{S})$

$p(\overline{S}) = 0,8 \times 0,9 + 0,16 \qquad p(\overline{S}) = 0,88.$

La probabilité que la boîte prélevée ne contienne aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On cherche à calculer $p_S(B)$.

On a : $p_S(B) = \dfrac{p(B \cap S)}{p(S)} = \dfrac{p(B \cap S)}{1 - p(\overline{S})}$. $\qquad$ Ainsi : $p_S(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{1 - 0,88} = \dfrac{1}{3}$.

Sachant que la boîte contient des traces de pesticides, il y a une chance sur 3 pour qu'elle provienne du fournisseur B.

Partie B

1. On considère l'expérience aléatoire : « acheter une boîte de thé chez le fournisseur et regarder si elle présente des traces de pesticides ».

Deux issues pour cette expérience,

le succès : « La boîte ne présente pas de traces de pesticides » On a $p = 0,88$.

l'échec : « La boîte présente des traces de pesticides ». On a $q = 0,12$.

C'est donc une épreuve de Bernoulli.

On répète cette même expérience aléatoire 10 fois, de façon indépendante.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès S suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

2. On cherche : $p(X = 10)$. $\qquad p(X = 10) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,88^{10} \times 0,12^0$.

D'après la calculatrice, $p(X = 10) \approx 0,279$. $\qquad$ (binomFdp(10,0.88,10)$\approx 0,279$)

La probabilité que les 10 boîtes prélevées ne présentent aucune trace de pesticides est environ égale à 0,28.

3. On cherche : $p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$.

$$p(X \geq 8) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,88^{10} \times 0,12^0 + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0,88^9 \times 0,12^1 + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} 0,88^8 \times 0,12^2$$

$p(X \geq 8) \approx 0,891$.

ou bien : $p(X \geq 8) = 1 - p(X \leq 7)$.

D'après la calculatrice, $p(X \leq 7) \approx 0,109$ (binomFRep(10,0.88,7)$\approx 0,109$)

D'où, $p(X \geq 8) \approx 1 - 0,109$. Soit : $p(X \geq 8) \approx 0,891$.

La probabilité qu'au moins 8 boîtes prélevées ne présentent aucune trace de pesticides est environ égale à 0,89.

Exercice 4

1. $u_0 = 5$ $u_1 = 5,1$ On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

On a ainsi : pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\,(u_{n+1} - u_n)$.

$u_2 - u_1 = 0,9\,(u_1 - u_0)$ c'est à dire : $u_2 - 5,1 = 0,9\,(5,1 - 5)$

$u_2 = 5,19$.

2. (a) On a : $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\,(u_{n+1} - u_n)$

C'est à dire : $u_{n+2} = u_{n+1} + 0,9u_{n+1} - 0,9u_n$. Soit finalement : $u_{n+2} = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n$.

$$AV_n = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9u_{n+1} - 0,9u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}.$$

(b) On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$

Calculons la matrice D telle que : $D = P^{-1}AP$

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \times 1,9 + 10 \times 1 & -10 \times (-0,9) + 10 \times 0 \\ 10 \times 1,9 - 9 \times 1 & 10 \times (-0,9) - 9 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \times 0,9 + 9 \times 1 & -9 \times 1 + 9 \times 1 \\ 10 \times 0,9 - 9 \times 1 & 10 \times 1 - 9 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que D est une matrice diagonale.

(c) On veut démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,$A^n = PD^nP^{-1}$.

* Pour $n = 0$, on a : $PD^0P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^0$.

L'égalité est vraie pour $n = 0$.

* On suppose que pour un k entier naturel fixé, on a : $A^k = PD^kP^{-1}$, démontrons alors que :

$A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

$A^{k+1} = A^kA = PD^kP^{-1}A$.

Or, on a vu dans 2.b) que $D = P^{-1}AP$ soit encore : $PD = PP^{-1}AP$

et finalement : $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1}$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$.

Ainsi, $A^{k+1} = PD^kP^{-1}A = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

Si $A^k = PD^kP^{-1}$, pour un k entier naturel fixé, alors $A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$.

Conclusion : On vient donc de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Pour tout entier n, on a : $V_n = A^nV_0$

c'est à dire : $V_n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $u_n = (-10 \times 0,9^n + 10)\, u_1 + (10 \times 0,9^n - 9)\, u_0$

$u_n = (-10 \times 0,9^n + 10) \times 5,1 + (10 \times 0,9^n - 9) \times 5$

$u_n = 10 \times 0,9^n(-5,1 + 5) + 51 - 45$

$u_n = -0,9^n + 6$.

3. Pour calculer la taille de la colonie au bout du 10ème jour, on détermine u_{10}.

$u_{10} \approx 5,651$. Au bout du 10ème jour, il y aura environ 5 651 fournmis dans la colonie.

4. On a, d'après 2. (d) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -0,9^n + 6$.

Or, $\underset{n \to +\infty}{lim}(0,9^n) = 0$. C'est la limite en l'infini d'une suite de type (q^n) avec $0 < q < 1$.

Donc, $\underset{n \to +\infty}{lim}(u_n) = 6$. Le nombre de fourmis dans la colonie tendra vers 6 000.