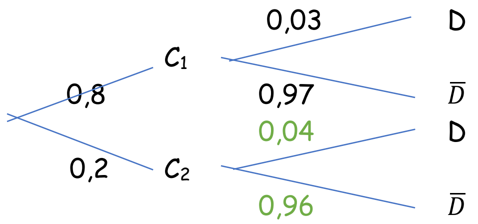
BAC BLANC DE MATHEMATIQUES DU LYCEE SAINT SERNIN 2023
Terminale EDS Mathématiques
Sujet 1 Correction

EXERCICE 1 : **6 points**

PARTIE A

1)



2) a) $P(C_1 \cap D) = P(C_1) \times P_{C_1}(D) = 0,8 \times 0,03 = 0,024$

La probabilité pour que le composant prélevé provienne de la chaîne n°1 et soit défectueux est **0,024**.

b) $P_D(C_1) = \frac{P(C_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,024}{0,032} = \mathbf{0,75.}$

La probabilité que le composant vienne de la chaine n°1 sachant qu'il présente un défaut est 0,75.

3) $P_{C_2}(D) = \frac{P(C_2 \cap D)}{P(C_2)} = \frac{P(D) - P(C_1 \cap D)}{P(C_2)} = \frac{0,032 - 0,024}{0,2} = \frac{0,008}{0,2} = \mathbf{0,04.}$

PARTIE B

1) Prélever un composant est une épreuve de Bernoulli de succès « le composant est défectueux » de probabilité 0,032. Il y a une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes car ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
donc X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p* = 0,032.

2)

a) $P(X = 3) = \binom{20}{3} 0,032^3 \times 0,968^{17} \approx$ **0,0215.**

la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux est d'environ 0,0215.

b) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = \mathbf{0,1332}$

La probabilité pour qu'un lot possède entre deux et cinq composants défectueux est d'environ 0,1332.

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx \mathbf{0,4782}$

La probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux est d'environ 0,4782.

3) Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité d'avoir au moins un composant défectueux dans un lot de n composants soit inférieure à 0,15.
Déterminer le plus grand entier n tel que le souhait du directeur soit respecté.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,968^n$$

On veut ici que $P(X \geq 1) \leq 0,15$ soit $1 - 0,968^n \leq 0,15$ ou soit encore $0,85 \leq 0,968^n$

1ère méthode : On utilise le tableur de la calculatrice et on trouve $\boldsymbol{n = 4}$.

2ème méthode :

$(0,968^n)$ est une suite géométrique décroissante car $0 < 0,968 < 1$. De plus, $0,968^4 \approx 0,8780$ et $0,968^5 \approx 0,8499$

Donc le valeur cherchée est $\boldsymbol{n = 4}$.

3ème méthode : On utilise le logarithme népérien

$0,85 \leq 0,968^n$ soit $ln(0,85) \leq ln\,(0,968^n)$

On a alors $ln(0,85) \leq n ln\,(0,968)$ et comme $ln(0,968)$ est négatif $n \leq \frac{\ln(0,85)}{ln(0,968)}$ or $\frac{\ln(0,85)}{ln(0,968)} \approx 4,9970$

Donc le valeur cherchée est $\boldsymbol{n = 4}$.

EXERCICE 2 : **5 points**

Partie A

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x+1 = -\infty$ par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$

2) Pour tout réel x , $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$3x^2 - 6x + 5$ est un polynôme de degré 2 avec $\Delta = -24$ donc du signe de $a = 3$ soit toujours strictement positif. On en déduit que p est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	-∞		+∞
$p'(x)$		+	
Var de p	$-\infty$	↗	+∞

3) p est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\mp\infty} p(x) = +\infty$donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\mathbb{R}$ une unique solution α.

4) $\alpha \approx -0{,}2$ au dixième près.

5) Donner le tableau de signes de la fonction p sur $\mathbb{R}$.

x	-∞		α		+∞
$p(x)$		-	0	+	

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

1) **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty$ par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$ On sait d'après le cours que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = 1$ puis par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$ et enfin par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc la courbe C_f n'admet qu'une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

$\frac{e^x}{(1+x^2)^3}$ est toujours strictement positif sur $\mathbb{R}$. donc le signe de $f''(x)$ est celui de $p(x)(x-1)$

x	-∞		α		1		+∞
$p(x)$		−	0	+		+	
$x-1$		−		−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

f'' s'annule 2 fois, en α et en 1, en changeant de signe, il y a donc deux points d'inflexion. La rampe assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 3 : 4 points

1) On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$. On peut affirmer que :

a) (a_n) est arithmétique ; **b)** (b_n) est géométrique (de raison 0,5) ;

c) (a_n) est géométrique ; **d)** (b_n) est arithmétique.

Dans les questions **2.** et **3.**, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

u_0= 2, v_0= 1 et, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$

2) On peut affirmer que :

a) $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ **b)** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c)** $\frac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d)** $5u_1 = 3v_1$

3) On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range (1,11) :
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return u, v
```

Ce programme renvoie :

a) u_{11} et v_{11} ; **b)** u_{10} et v_{11} ;

c) les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ; **d)** u_{10} et v_{10}.

4) On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

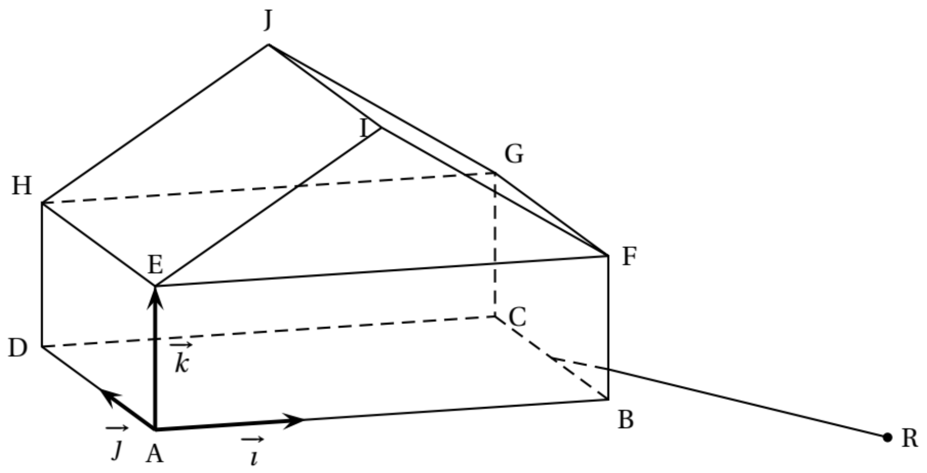
pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$. On peut affirmer que :

a) la suite (u_n) converge ; **b)** pour tout entier naturel n, $v_n \leq 2$;

c) la suite (u_n) diverge ; **d)** la suite (u_n) est majorée.

EXERCICE 4 : **5 points**

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.
Cette maison est représentée ci-dessous.



On a AB = 3, AD = 2, AE = 1.

On définit les vecteurs $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1) B(3 ;0 ;0) ,E(0 ; 0 ; 1), F(3 ; 0 ; 1) et G(3 ;2 ;1).

2) a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (EHI) donc une équation de (EHI) est de la forme $2x + 0y - 3z + d = 0$.

Or $E(0\,;\,0\,;\,1) \in (EHI) \Leftrightarrow 2 \times 0 + 0 \times 0 - 3 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$.

Donc une équation cartésienne du plan (EHI) est $2x - 3z + 3 = 0$

b) Puisque (EIF) est isocèle en I le projeté orthogonal de I sur [EF] est le milieu de [EF]; ces deux points ont donc la même abscisse qui est aussi celle du milieu de [AB] soit $\frac{3}{2}$. L'ordonnée de I est 0.

Enfin $\mathrm{I}(\frac{3}{2}; 0; z_I) \in (EHI) \Leftrightarrow 2 \times \frac{3}{2} - 3z_I + 3 = 0 \Leftrightarrow 3z_I = 6 \Longleftrightarrow z_I = 2$. Donc $\mathrm{I}(\frac{3}{2}; 0; 2)$.

3) on a $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $IE = \sqrt{\frac{9}{4} + 0 + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ et $IF = \sqrt{\frac{9}{4} + 0 + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Donc $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IF} = IE \times IF \times \cos(\widehat{EIF}) = \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{13}}{2} \times \cos(\widehat{EIF}) = \frac{13}{4}\cos(\widehat{EIF})$

Par ailleurs $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IF} = -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 0 \times 0 + -1 \times (-1) = -\frac{9}{4} + 1 = -\frac{5}{4}$

Finalement $\frac{13}{4}\cos(\widehat{EIF}) = -\frac{5}{4}$

soit $\cos(\widehat{EIF}) = -\frac{5}{13}$. On en déduit que $\widehat{EIF} \approx 112,6°$. L'angle $\widehat{EIF}$ mesure environ 113° au degré près.

4) a) Une représentation paramétrique de la droite Δ passant par R(6 ; −3 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (−3 ; 4 ; 1) est : $\begin{cases} x = -3t + 6 \\ y = 4t - 3 \\ z = t - 1 \end{cases} \quad avec\ t \in \mathbb{R}$

b) K(x ; y ; z) est commun à Δ et au plan (BFG) si ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de Δ et l'équation cartésienne du plan (BFG) soit si le triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} x = -3t + 6 \\ y = 4t - 3 \\ z = t - 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -3t + 6 \\ y = 4t - 3 \\ z = t - 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Les coordonnées du point K sont (3 ;1 ;0).

c) Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

Avec B(3; 0; 0) et C(3; 2; 0) on remarque que les coordonnées de K sont les demi-sommes des coordonnées de B et de C, donc que K est le milieu du segment [BC].