BAC BLANC DE MATHEMATIQUES DU LYCEE SAINT SERNIN

Terminale S Durée : 4 heures février 2016

Sujet : mathématiques (Spécialité)

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Les exercices 1,2 et 3 sont communs aux spécialistes et non-spécialistes.

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué 0,5 point par réponse exacte correctement justifiée et 0 point pour une réponse non justifiée, une absence de réponse ou une réponse fausse.

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par f(x)= $\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ où a, b et c sont des réels.

Voici son tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) f(-2) = 3 **b)** $f'(x) = \dfrac{ax^2+4ax+2b-c}{(x+2)^2}$ **c)** $a<0$

d) $f(0)>0$ **e)** $c>0$ **f)** $b^2-4ac>0$

Exercice 2 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 - 2z + 3$.

1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z= x+ iy où x et y sont réels, tels que les points M' associés soient sur l'axe des réels.

4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble (E). (Laisser les traits de construction)

5) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $z^2 - 2z + 3 = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles cette équation admet deux solutions complexes conjuguées.

Exercice 3 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+4}$.

On nomme C_f sa courbe représentative et Δ la droite d'équation y = x dans le repère orthogonal donné en **Annexe 2**.

Partie A

1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

3) Etudier les variations de f.

4) Soit l'algorithme suivant :

Données :	n et x, deux entiers naturels et y réel
Traitement :	x prend la valeur 0
	y prend la valeur 0,8
	Lire n
	Tant que $4-y \geq 10^{-n}$, faire :
	x prend la valeur x + 1
	y prend la valeur $\frac{4e^x}{e^x+4}$
	Fin du tant que
Sortie :	Afficher x

a) Quel est le but de cet algorithme ?

b) Pourquoi peut-on affirmer qu'une valeur va s'afficher ?

c) Quelle valeur s'affiche si la valeur entrée pour n est 1 ?
Vous complèterez le nombre de lignes nécessaires dans le tableau en **Annexe 1** qui détaille les étapes de l'algorithme.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

1) En utilisant les limites trouvées à la question 1, déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout réel x, on a : $g'(x) = \frac{-(e^x-4)^2}{(e^x+4)^2}$.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la nomme α.

4) Donner une valeur approchée de α arrondie à 10^{-3} près.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$; et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Sur le graphique donné en **Annexe 2**, placer les points A_0 , A_1 , A_2, …, A_7 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2, …, u_7 (Faire apparaître les traits de construction). Que suggère le graphique concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 4 (5 points) :

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,8 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

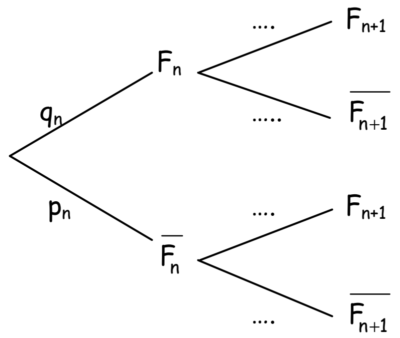
On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

Comme il s'agit d'un fumeur, on pose $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1) Donner p_1 et q_1.

2) Pour tout entier naturel n, on note : F_n l'événement : « il fume le n-ième jour après sa décision ».

Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire p_{n+1} en fonction de p_n et q_n puis q_{n+1} en fonction de p_n et q_n.

3) On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $X_{n+1} = M X_n$

On admet que, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

b) Vérifier que $M = A + 0,4B$. (Donner le détail des calculs)

c) Vérifier que $A^2 = A$ et que $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Donner le détail des calculs)

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,4^n B$.

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = \frac{2}{3} - 0,4^n \times \frac{2}{3}$

f) A long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Nom et prénom : ………………………………………

Annexes à rendre avec votre copie :

Annexe 1

x	Y	4-Y	$4-Y \geq 10^{-N}$
0	0,8	3,2	*Oui*
1	1,618	2,382	*Oui*
2			

Annexe 2