

# BAC BLANC DE MATHÉMATIQUES DU LYCÉE SAINT SERVIN

Terminale S Durée : 4 heures février 2016

## Sujet : mathématiques (Obligatoire)

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Les exercices 1,2 et 3 sont communs aux spécialistes et non-spécialistes.

### Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué 0,5 point par réponse exacte correctement justifiée et 0 point pour une réponse non justifiée, une absence de réponse ou une réponse fausse.

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x+2}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels.

Voici son tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$+\infty$						
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$					
Variations de $f$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$2$	$\nearrow$	$+\infty$

a)  $f(-2) = 3$

b)  $f'(x) = \frac{ax^2 + 4ax + 2b - c}{(x+2)^2}$

c)  $a < 0$

d)  $f(0) > 0$

e)  $c > 0$

f)  $b^2 - 4ac > 0$

### Exercice 2 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . À tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = z^2 - 2z + 3$ .

1) Un point  $M$  est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point  $M'$  associé.

Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2) Soit  $A$  le point d'affixe  $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$  et  $B$  le point d'affixe  $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ .

Montrer que  $OAB$  est un triangle équilatéral.

3) Déterminer l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  d'affixe  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont réels, tels que les points  $M'$  associés soient sur l'axe des réels.

4) Dans le plan complexe, représenter les points  $A$  et  $B$  ainsi que l'ensemble  $(E)$ . (Laisser les traits de construction)

5) Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère l'équation  $z^2 - 2z + 3 = \lambda$  d'inconnue  $z$ .

Déterminer l'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles cette équation admet deux solutions complexes conjuguées.

### Exercice 3 : (7 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+4}$ .

On nomme  $C_f$  sa courbe représentative et  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$  dans le repère orthogonal donné en **Annexe 2**.

#### Partie A

- 1) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
- 3) Etudier les variations de  $f$ .
- 4) Soit l'algorithme suivant :

**Données :**  $n$  et  $x$ , deux entiers naturels et  $y$  réel

**Traitement :**  $x$  prend la valeur 0

$y$  prend la valeur 0,8

Lire  $n$

Tant que  $4-y \geq 10^{-n}$ , faire :

$x$  prend la valeur  $x + 1$

$y$  prend la valeur  $\frac{4e^x}{e^x+4}$

Fin du tant que

**Sortie :** Afficher  $x$

a) Quel est le but de cet algorithme ?

b) Pourquoi peut-on affirmer qu'une valeur va s'afficher ?

c) Quelle valeur s'affiche si la valeur entrée pour  $n$  est 1 ?

Vous complèterez le nombre de lignes nécessaires dans le tableau en **Annexe 1** qui détaille les étapes de l'algorithme.

#### Partie B

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = f(x) - x$ .

- 1) En utilisant les limites trouvées à la question 1, déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 2) Démontrer que pour tout réel  $x$ , on a :  $g'(x) = \frac{-(e^x-4)^2}{(e^x+4)^2}$ .
- 3) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On la nomme  $\alpha$ .
- 4) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  arrondie à  $10^{-3}$  près.

#### Partie C

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  ; et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- 1) Sur le graphique donné en **Annexe 2**, placer les points  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_7$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_7$  (Faire apparaître les traits de construction). Que suggère le graphique concernant le sens de variation et la convergence de la suite  $(u_n)$  ?
- 2) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ . Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

#### Exercice 4 (5 points) :

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,8 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle  $p_n$  la probabilité de fumer le  $n$ -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et  $q_n$ , la probabilité de ne pas fumer le  $n$ -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

Comme il s'agit d'un fumeur, on pose  $p_0 = 1$  et  $q_0 = 0$ .

#### Partie A

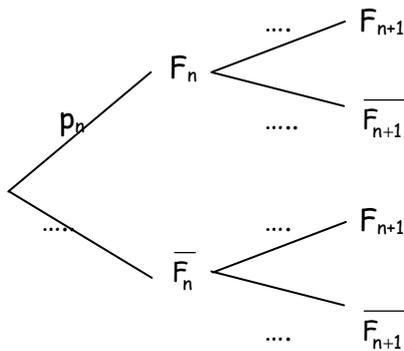
On appelle :  $F_1$  l'événement « il fume le premier jour » ;  $F_2$  l'événement « il fume le deuxième jour »

- 1) Représenter la situation deux jours après sa décision à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2) Calculer la probabilité de l'événement  $F_1 \cap F_2$ .
- 3) Justifier que  $p(F_2) = 0,44$ .
- 4) Calculer la probabilité l'événement  $F_1 \cup F_2$ .
- 5) Calculer la probabilité  $p_{F_2}(F_1)$ . Interpréter le résultat obtenu.

#### Partie B

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :  $F_n$  l'événement : « il fume le  $n$ -ième jour après sa décision.

- 1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



- 2) Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ .

#### Partie C

On considère la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = p_n - \frac{1}{3}$ .

- 1) Démontrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison 0,4.
- 2) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  puis  $p_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter le résultat obtenu.

Nom et prénom : .....

Annexes à rendre avec votre copie :

Annexe 1

x	y	4-y	$4 - Y \geq 10^{-n}$
0	0,8	3,2	Oui
1	1,618	2,382	Oui
2			

Annexe 2

