CORRECTION DU BAC BLANC DE MATHEMATIQUES DU LYCEE SAINT SERNIN
Février 2016

Exercice 1 (3 points) :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par f(x)= $\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ où a, b et c sont des réels.

Voici son tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a) f(-2) = 3 **Faux** car f n'est pas définie en -2.

b) $f'(x) = \dfrac{(2ax+b)(x+2)-(ax^2+bx+c)}{(x+2)^2} = \dfrac{2ax^2+4ax+bx+2b-ax^2-bx-c}{(x+2)^2} = \dfrac{ax^2+4ax+2b-c}{(x+2)^2}$ **Vrai**

c) $a < 0$ **Faux** car le signe de la dérivée (quotient d'un polynôme du second degré qui a 2 racines par $(x+2)^2$, toujours positif) est du signe de a à l'extérieur des racines OU car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax = +\infty$ donc a positif

d) f(0)>0 **Vrai** car f(0) > 2

e) c>0 **Vrai** car f(0)=c/2 et f(0)>0

f) $b^2-4ac > 0$ **Faux** car f(x) ne s'annule pas sur R donc $b^2 - 4ac < 0$

Exercice 2 (5 points) :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 - 2z + 3$.

1) $z'=z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 = z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0$

$\Delta = 9-12 = -3 < 0$ donc deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$

$\left|\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$ d'où $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

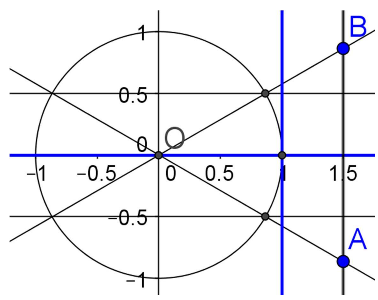
$OA = |z_A| = \sqrt{3}$; $OB = |z_B| = \sqrt{3}$ et $AB = |z_B - z_A| = \left|\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\dfrac{2i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$ donc OAB équilatéral.

3) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z= x+ iy où x et y sont réels, tels que les points M' associés soient sur l'axe des réels.

$z' = z^2 - 2z + 3 = (x+iy)^2 - 2(x+iy) + 3 = x^2 - 2x - y^2 + 3 + i(2xy - 2y)$

z' réel $\Leftrightarrow$ Im(z')= 0 $\Leftrightarrow$ 2xy-2y = 0 $\Leftrightarrow$ 2y(x-1) = 0 $\Leftrightarrow$ 2y = 0 ou x-1 = 0 $\Leftrightarrow$ y=0 ou x = 1

l'ensemble (E) est la réunion de deux droites d'équation y = 0 et x = 1.



4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble (E).

5) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $z^2 - 2z + 3 = \lambda$ d'inconnue z.

$z^2 - 2z + 3 = \lambda \Leftrightarrow z^2 - 2z + 3 - \lambda = 0$ $\Delta = 4 - 4(3-\lambda) = -8 + 4\lambda$

l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -8 + 4\lambda < 0$

$\Leftrightarrow \lambda < 2$

Exercice 3 (7 points) :

Partie A

1) $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+4} = \frac{4}{1+4e^{-x}}$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

C_f admet deux asymptotes horizontales d'équations y = 4 et y = 0 respectivement en +∞ et -∞.

2) $f'(x) = \frac{4e^x(e^x+4)-4e^xe^x}{(e^x+4)^2} = \frac{16e^x}{(e^x+4)^2}$

3) Pour tout x réel, $e^x > 0$ d'où f'(x) > 0 et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) **a)** Le but de cet algorithme est de trouver la plus petite valeur entière de x pour laquelle :

$4 - f(x) < 10^{-n}$

b) On peut affirmer qu'une valeur va s'afficher car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ donc tout intervalle ouvert contenant 4 contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est assez grand.

c) La valeur qui s'affiche si la valeur entrée pour n est 1 est x= 6.

x	y	4-y	$4-y \geq 10^{-1}$
0	0,8	3,2	Oui
1	1,618	2,382	Oui
2	2,595	1,405	Oui
3	3,336	0,664	Oui
4	3,727	0,273	Oui
5	3,895	0,105	Oui
6	3,961	0,039	Non

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ *et* $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ d'où par somme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ d'où par somme $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

2) Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \frac{16e^x}{(e^x+4)^2}$

d'où $g'(x) = \frac{16e^x}{(e^x+4)^2} - 1 = \frac{16e^x-(e^x+4)^2}{(e^x+4)^2} = \frac{16e^x-e^{2x}-8e^x-16}{(e^x+4)^2} = \frac{-(e^{2x}-8e^x+16)}{(e^x+4)^2} = \frac{-(e^x-4)^2}{(e^x+4)^2}$.

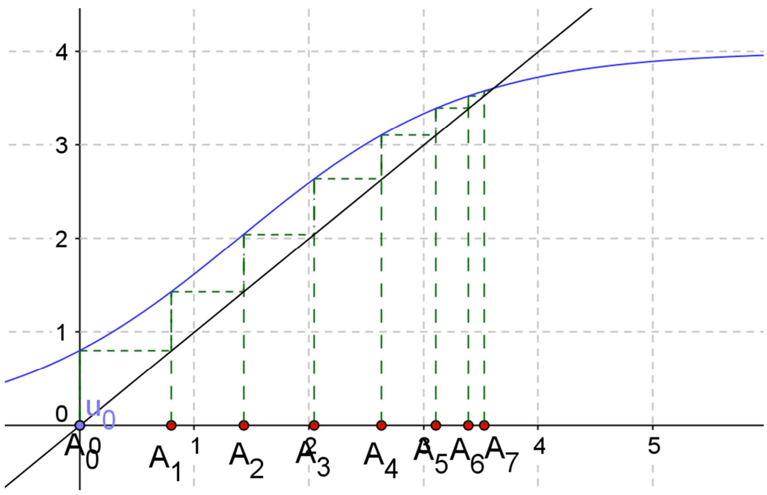
3) Pour tout x réel, g'(x) est négatif et s'annule lorsque e^x = 4 d'où g est strictement décroissante sur R
g est aussi continue sur R car dérivable et 0 ∈]-∞ ;+∞[donc d'après l'extension du corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la nomme α.

x	-∞	α	+∞
Variation de g	+∞	0	-∞

4) Grace à la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 3{,}609$

Partie C

On considère la suite (u_n)définie par : $u_0 = 0$; et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.



1) (u_n) semble croissante et convergente vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation y=x, c'est-à-dire vers α.

2) Initialisation : u_0= 0 et $u_1=f(0)= \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un certain n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Comme la fonction f est croissante sur R, on a $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$

Or $f(0) = \frac{4}{5} > 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$; $f(\alpha) = \alpha$

On a alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$. La propriété est donc vraie au rang n+ 1.

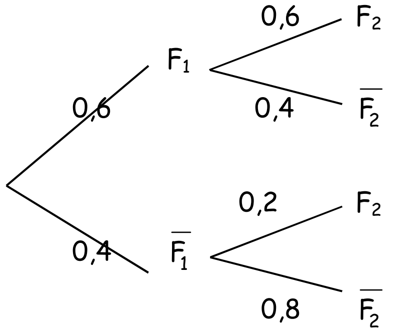
Conclusion: La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. La suite (u_n) est croissante est majorée par α, elle est donc convergente.

Exercice 4 Obligatoire (5 points) :

Partie A

On appelle : F_1 l'événement « il fume le premier jour » ; F_2 l'événement « il fume le deuxième jour»

1) Représenter la situation deux jours après sa décision à l'aide d'un arbre pondéré.



1) $F_1 \cap F_2$ « Il fume le 1er jour et le deuxième jour ».
$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P_{F1}(F_2) = 0,6\times0,6 = 0,36$.

2) $P(F_2) = P(F_1 \cap F_2) + P(\overline{F_1} \cap F_2) = 0,36+ 0,4\times0,2 = 0,44$

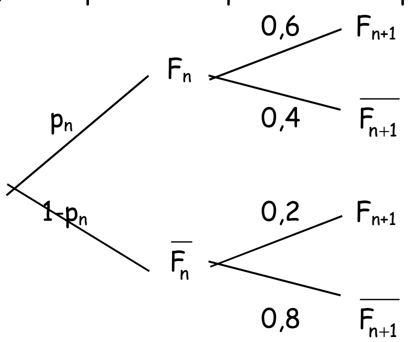
3) $F_1 \cup F_2$: « il fume le premier jour ou le deuxième jour ».
$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1)+ P(F_2)- P(F_1 \cap F_2) =0,6 + 0,44 - 0,36 = 0,68$

4) $p_{F_2}(F_1) = \dfrac{P(F_1\cap F_2)}{P(F_2)} = \dfrac{0,36}{0,44} = \dfrac{9}{11}$ Sachant qu'il a fumé le deuxième jour, il a une probabilité de 9/11 d'avoir fumé le premier jour.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on note : F_n l'événement : « il fume le n-ième jour après sa décision.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.

$p_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_n \cap F_{n+1}) + P(\overline{F_n} \cap F_{n+1}) = 0,6p_n + 0,2(1-p_n) = 0,4p_n + 0,2$

Partie C

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{3}$.

1) $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{3} = 0,4p_n + 0,2 - \dfrac{1}{3} = 0,4p_n - \dfrac{2}{15} = 0,4(p_n - \dfrac{2}{0,4\times15}) = 0,4(p_n - \dfrac{1}{3}) =0,4u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,4 et de premier terme $u_0= p_0 - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

2) Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0q^n = \dfrac{2}{3}\times0,4^n$ et $p_n = u_n + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}\times0,4^n + \dfrac{1}{3}$

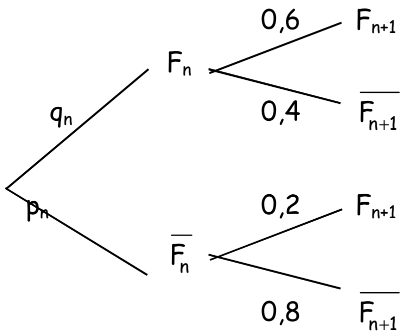
3) $0<0,4<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,4^n=0$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3}\,0,4^n=0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{3}$

A long terme, la probabilité que le fumeur ne s'arrête pas de fumer est de $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 4 Spécialité (5 points) :

1) $p_1 = 0{,}4$ et $q_1 = 0{,}6$

2) Pour tout entier naturel n, on note : F_n l'événement : « il fume le n-ième jour après sa décision ».



$p_{n+1} = 0{,}4q_n + 0{,}8p_n$ et $q_{n+1} = 0{,}6q_n + 0{,}2p_n$

3) a) $M\ X_n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8p_n + 0,4q_n \\ 0,2p_n + 0,6q_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$

b) $A + 0,4B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{0,4}{3} & \frac{2}{3}-\frac{0,8}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{0,4}{3} & \frac{1}{3}+\frac{0,8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} & \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 & \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{9} & \frac{6}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$

$AB = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}-\frac{2}{9} & -\frac{4}{9}+\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9}-\frac{1}{9} & -\frac{2}{9}+\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et BA = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}-\frac{2}{9} & \frac{2}{9}-\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9}-\frac{2}{9} & -\frac{2}{9}+\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0{,}4^nB$

Initialisation : $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A+0{,}4^0B = A+B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un certain n, $M^n = A + 0{,}4^nB$.

$M^{n+1} = M\,M^n = (A + 0{,}4B)(A + 0{,}4^nB) = A^2 + 0{,}4^nAB + 0{,}4BA + 0{,}4\times0{,}4^nB^2$

Or $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB=BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $M^{n+1} = A + 0{,}4^{n+1}B$ La propriété est donc vraie au rang n+ 1.

Conclusion: La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0{,}4^nB$

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0{,}7 - 0{,}6\times0{,}5^n$.

$M^n = A + 0{,}4^nB = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+0,4^n\times\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-0,4^n\times\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}-0,4^n\times\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+0,4^n\times\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ or $X_n = M^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$

D'où $p_n = \left(\frac{2}{3} - 0,4^n\times\frac{1}{3}\right)\times0 + \left(\frac{2}{3} - 0,4^n\times\frac{2}{3}\right)\times1 = \frac{2}{3} - 0,4^n\times\frac{2}{3}$

f) A long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

$0<0{,}4<1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{3}\,0{,}4^n = 0$ et par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$

A long terme, la probabilité que le fumeur s'arrête est de $\frac{2}{3}$

On ne peut donc pas affirmer avec certitude que le fumeur s'arrêtera de fumer.