CORRECTION DU
BAC BLANC DE MATHEMATIQUES DU LYCEE SAINT SERNIN
Terminale S Durée : 4 heures Mars 2019

Exercice 1 5 points Amérique du Nord Juin 2016 (modifié)

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- La machine A produit 60% de la production journalière.
- La proportion de balles commercialisables parmi la production de la machine A est 98% et 93% parmi la production de la machine B.

On choisit une balle au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :
A : "la balle a été fabriquée par la machine A";
B : "la balle a été fabriquée par la machine B";
C : "la balle est commercialisable".

1) Déterminer la probabilité que la balle choisie soit commercialisable et provienne de la machine A.
On a $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(C) = 0{,}98$ Donc $P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$.

2) Déterminer la probabilité que la balle choisie soit commercialisable.
D'après la formule des probabilités totales on a :
$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) \Leftrightarrow P(C) = 0{,}588 + P(B) \times P_B(C) = 0{,}588 + 0{,}4 \times 0{,}93 = 0{,}96$

3) Un technicien affirme que 70% des billes non commercialisables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?
$P_{\bar{C}}(B) = \dfrac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \dfrac{P(B) \times P_B(\bar{C})}{0{,}04} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}07}{0{,}04} = 0{,}7$
Le technicien a donc raison.

Partie B

1) Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 20 balles.
On choisit au hasard un sachet de balles. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 5 balles rouges. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
On répète 20 fois, de manière identique et indépendante (tirage successif avec remise), une expérience aléatoire à 2 issues : S : « la balle est rouge » qui a une probabilité de $\frac{1}{4}$ et $\bar{S}$
On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli.
On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès donc de balles rouges.
Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$.
Ainsi $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}25^5 \times 0{,}75^{15} \approx 0{,}202$.

2) Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une balle rouge dans un sachet soit supérieure ou égale à 99%, quel nombre minimal de balles chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?
On appelle X ' la variable aléatoire comptant le nombre boules rouges parmi n boules tirées.
Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, X' suit la loi binomiale de paramètres n et p=0,25.
On veut obtenir :

$$P(X' \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X' = 0) \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow -P(X' = 0) \geqslant -0{,}01 \Leftrightarrow P(X' = 0) \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}75^n \leqslant 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow nln(0{,}75) \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}75)} \Leftrightarrow n \geqslant 17$$

OU $(0{,}8^n)$ est une suite géométrique décroissante car $0 < 0{,}75 < 1$.
De plus $0{,}75^{16} \approx 0{,}01002 > 0{,}01$ et $0{,}8^{17} \approx 0{,}00759 < 0{,}01$
Il faut donc que les sachets contiennent au moins 17 billes pour que la probabilité d'obtenir au moins une balle noire dans le sachet soit supérieure à 0,99.

Exercice 2 5 points Asie juin 2017 (modifié)

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 10, et on choisit un débit d égal à 130.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur [0;+∞[par : $C(t) = 13(1 - e^{-\frac{1}{8}t})$.

1) La fonction C est dérivable sur l'intervalle [0;+∞[comme composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. $C'(t) = 13(-(-\frac{1}{8})e^{-\frac{1}{8}t}) = \frac{13}{8}e^{-\frac{1}{8}t}$

or pour tout t de [0;+∞[, $e^{-\frac{1}{8}t} > 0$, on a donc $C'(t) > 0$ pour tout réel t positif.

La fonction C est donc strictement croissante sur [0;+∞[.

2) Pour être efficace, le plateau doit être égal à 14. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

$\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{8}t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ d'où par composée $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = 0$

Puis par somme et produit $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 13 \neq 14$ Le traitement de ce patient n'est donc pas efficace.

Partie B : étude de fonctions

1) Soit f la fonction définie sur]0;+∞[par : $f(x) = \frac{110}{x}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right)$.

Démontrer que, pour tout réel x de]0;+∞[, $f'(x) = 110\frac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur [0;+∞[par : $g(x) = \frac{3}{40}xe^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1$.

La fonction f est dérivable sur]0;+∞[comme composée, somme et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$f = uv$ avec $u(x) = \frac{110}{x}$ et $v(x) = 1 - e^{-\frac{3}{40}x}$ On a $u'(x) = -\frac{110}{x^2}$ et $v'(x) = \frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}$

$$f'(x) = -\frac{110}{x^2}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{110}{x} \times \frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x} = -\frac{110}{x^2} + \frac{110}{x^2}e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{110}{x} \times \frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}$$

$$= \frac{110}{x^2}\left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3}{40}xe^{-\frac{3}{40}x}\right) = \frac{110}{x^2}g(x)$$

2) D'après le tableau de variation de la fonction g on sait que $g(x) < 0$ pour tout réel x strictement positif.

Par conséquent, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur l'intervalle]0;+∞[.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle [1;80].

En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle]0;+∞[.

Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

La fonction f **est continue** (car dérivable) et **strictement décroissante sur l'intervalle [1;80].**

$$f(1) = 110\left(1 - e^{-\frac{3}{40}}\right) \approx 7{,}95 > 5{,}9$$

$$f(80) = 1{,}375(1 - e^{-6}) \approx 1{,}37 < 5{,}9$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 5{,}9$ possède une unique solution α sur l'intervalle [1;80]. D'après la calculatrice $\alpha \approx 9{,}5$

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1) On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 110.

a. $C(6) = \frac{110}{a}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}a}\right) = f(a)$

b. On cherche à résoudre $f(a) = 5{,}9$ donc d'après la question **B.3.** on en déduit que $a \approx 9{,}5\ L/h$.

2) Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

On a donc $C(t) = \frac{d}{9{,}5}(1 - e^{-\frac{9{,}5}{80}t})$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{9{,}5}{80}t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ d'où par composée $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{9{,}5}{80}t} = 0$

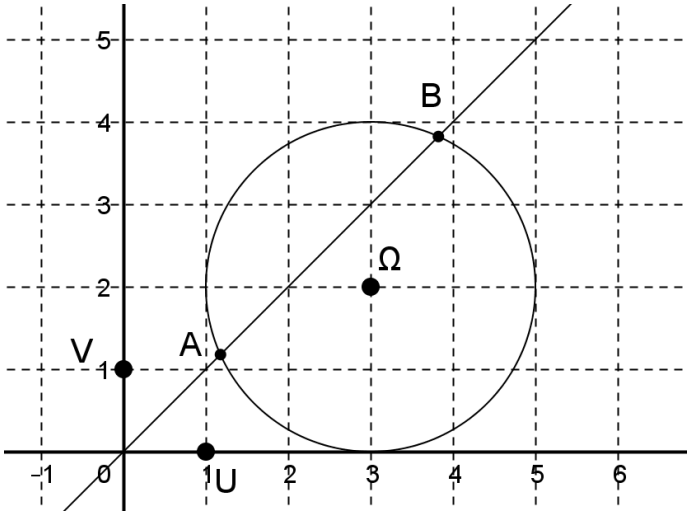
Puis par somme et produit $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \frac{d}{9{,}5}$

On veut que le plateau soit égal à 14 $\Leftrightarrow \frac{d}{9{,}5} = 14 \Leftrightarrow d = 133\ \mu mol/h$

Exercice 3 5 points

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

a) On note :
U le point d'affixe 1, V le point d'affixe i et Ω le point d'affixe $3 + 2i$.
(E) l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|z - 1| = |z - i|$,
(F) l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|z - 3 - 2i| \leq 2$,
et (S) l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions : $|z - 1| = |z - i|$ et $|z - 3 - 2i| \leq 2$.



Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre Ω et de rayon 2, et la droite d'équation y = x.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

Affirmation 1 : l'ensemble (E) est la médiatrice du segment [AB]. FAUX
$|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow MU = MV$
Donc (E) est la médiatrice de [UV] donc la droite d'équation y = x.
Comme A et B sont sur la droite d'équation x=y, (E) est la droite (AB) et n'est pas la médiatrice du segment [AB].

Affirmation 2 : l'ensemble (S) est le segment [AB]. VRAI
D'après la question précédente, (E) est la droite (AB).
$|z - 3 - 2i| \leq 2 \Leftrightarrow M\Omega \leq 2$ donc (F) est le disque de centre Ω et de rayon 2
L'intersection de (E) et (F) est bien le segment [AB]

b) **Affirmation 3** : le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^{2016}$ est un réel. VRAI

$\sqrt{3} + i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ d'où, si on appelle θ un argument de $\sqrt{3} + i$, on a $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{6}$ à 2π près

Et $\arg(\sqrt{3} + i)^{2016} = 2016 \arg(\sqrt{3} + i) = 2016 \times \frac{\pi}{6} = 336\pi$ donc $(\sqrt{3} + i)^{2016}$ est un réel.

c) Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E1) d'inconnue z : $z^2 - z\bar{z} - 1 = 0$.
Affirmation 4 : l'équation (E1) admet au moins une solution. FAUX
Posons $z = x + iy$ avec x et y des réels
$z^2 - z\bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + iy)^2 - (x + iy)(x - iy) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - (x^2 + y^2) - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi - x^2 - y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -2y^2 - 1 + 2xyi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -\frac{1}{2} \\ 2xy = 0 \end{cases}$
y est un nombre réel donc l'équation $y^2 = -\frac{1}{2}$ n'a p pas de solution et l'équation (E1) n'admet donc aucune solution.

d) Soit F le point d'affixe $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et G le point d'affixe $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.
Affirmation 5 : OFG est un triangle équilatéral. VRAI

OF= $\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$, OG= $\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ et FG = $\left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2} - \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

Exercice 4 5 points Nouvelle Calédonie 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1) a) A l'aide de la calculatrice, recopier et compléter ce tableau

n		0	1	2	3	4	5	6	7
u_n		1	1.75	2.3125	2.7344	3.0508	3.2881	3.4661	3.5995

n		20	21	22	23	24	…	35	36
u_n		3.9905	3.9929	3.9946	3.996	3.997		3.9999	3.9999

b) Il semblerait donc que la suite (u_n) soit croissante. Sa limite semble être 4.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 4 - 3 \times 0{,}75^n$.

Initialisation : Pour n = 0 u_0=1 et $4 - 3 \times 0{,}75^0 = 4 - 3 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain n : $u_n = 4 - 3 \times 0{,}75^n$.

On veut montrer que $u_{n+1} = 4 - 3 \times 0{,}75^{n+1}$.

$u_{n+1} = 0{,}75u_n + 1$

$= 0{,}75(4 - 3 \times 0{,}75^n) + 1$

$= 3 - 3 \times 0{,}75^{n+1} + 1$

$= 4 - 3 \times 0{,}75^{n+1}$ La propriété est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.

Pour tout entier naturel n on a donc $u_n = 4 - 3 \times 0{,}75^n$

3) $u_n = 4 - 3 \times 0{,}75^n$

$(0{,}75^n)$ est une suite géométrique décroissante car $0 < 0{,}75 < 1$ donc (u_n) est croissante.

OU Pour tout entier naturel n on a :

$u_{n+1} - u_n = 4 - 3 \times 0{,}75^{n+1} - 4 + 3 \times 0{,}75^n = -3 \times 0{,}75^{n+1} + 3 \times 0{,}75^n = -3 \times 0{,}75 \times 0{,}75^n + 3 \times 0{,}75^n$

$= -2{,}25 \times 0{,}75^n + 3 \times 0{,}75^n = 0{,}75 \times 0{,}75^n > 0$ La suite (u_n) est donc croissante.

Puisque $-1 < 0{,}75 < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 0{,}75^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Si le laboratoire achète chaque année 10 000 ténébrions alors son nombre de ténébrions augmentera chaque année et tendra vers 40 000 au bout d'un grand nombre d'années.

4) Le laboratoire souhaite trouver à partir de combien d'années le nombre de ténébrions est strictement supérieur à 30 000.

Recopier et compléter l'algorithme suivant pour que la variable n , après son exécution, contienne le nombre souhaité d'années.

```
n ← 0
u ← 1
Tant que u ≤ 3
        n ← n + 1
        u ← 0,75u + 1
Fin du Tant que
```

Partie B

Le laboratoire souhaite que le nombre de ténébrions tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 4c$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4c = 0{,}75u_n + c - 4c = 0{,}75u_n - 3c = 0{,}75(u_n - 4c) = 0{,}75\ v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = u_0 - 4c = 1 - 4c$

2) En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.

$v_n = (1 - 4c)0{,}75^n$ et $u_n = v_n + 4c = (1 - 4c)0{,}75^n + 4c$

3) Déterminer la valeur de c pour que le laboratoire atteigne son objectif.

Puisque $-1 < 0{,}75 < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 4c) \times 0{,}75^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4c$

Le laboratoire souhaite que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10$. il faut donc que $4c = 10$ soit $c = 2{,}5$

Pour atteindre son objectif, le laboratoire doit acheter tous les ans 25 000 ténébrions.

Exercice 4 5 points Amérique du Nord 2017 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) D'une année à l'autre, 20% des inscrits au programme A soit $0{,}2a_n$ choisissent à nouveau le programme A, alors que 40% soit $0{,}4a_n$ choisissent le programme B. Les autres, soit 40% quittent l'association soit $0{,}4a_n$. D'une année à l'autre, 60% des inscrits au programme B, soit $0{,}6b_n$ choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association soit $0{,}4b_n$. Donc le nombre d'abonnés qui quittent l'association est : $0{,}4a_n+0{,}4b_n$

Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, soit $0{,}4a_n+0{,}4b_n$ suivent obligatoirement le programme A.

Ainsi $a_{n+1} = 0{,}2a_n+0{,}4a_n+0{,}4b_n = 0{,}6a_n+0{,}4b_n$

et $b_{n+1} = 0{,}4a_n + 0{,}6b_n$

$MU_n = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6a_n + 0{,}4b_n\\ 0{,}4a_n + 0{,}6b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}$ d'où $U_{n+1} = MU_n$

2) Initialisation : $U_0 = \begin{pmatrix}150\\ 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}75+75\times 0{,}2^0\\ 75-75\times 0{,}2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}75+75\\ 75-75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}150\\ 0\end{pmatrix}$ La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose pour un certain entier naturel n : $U_n = \begin{pmatrix}75+75\times 0{,}2^n\\ 75-75\times 0{,}2^n\end{pmatrix}$

$U_{n+1} = MU_n = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}75+75\times 0{,}2^n\\ 75-75\times 0{,}2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6(75+75\times 0{,}2^n)+0{,}4(75-75\times 0{,}2^n)\\ 0{,}4(75+75\times 0{,}2^n)+0{,}6(75-75\times 0{,}2^n)\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}45+45\times 0{,}2^n+30-30\times 0{,}2^n\\ 30+30\times 0{,}2^n+45-45\times 0{,}2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}75+15\times 0{,}2^n\\ 75-15\times 0{,}2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}75+75\times 0{,}2\times 0{,}2^n\\ 75-75\times 0{,}2\times 0{,}2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}75+75\times 0{,}2^{n+1}\\ 75-75\times 0{,}2^{n+1}\end{pmatrix}$

La propriété est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire.

Donc pour tout entier naturel n on a donc $U_n = \begin{pmatrix}75+75\times 0{,}2^n\\ 75-75\times 0{,}2^n\end{pmatrix}$

3) $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}2^n = 0$ ainsi par produit puis par somme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 75$

Sur le long terme, les 2 programmes auront le même nombre d'inscrits.

Partie B

1) a. Si le nombre est 991383 alors $S = 9+1+8+3(9+3) = 54$ et $54 = 5\times 10+4$.

La clé devrait donc être 4.

Le nombre 991383 ne peut donc pas être celui d'un membre inscrit au club.

b. On note $S1 = 9+c_3+c_5+3\times(8+c_4)$ et $S2 = 0+c_3+c_5+3\times(1+c_4)$.

On veut donc savoir si $S1-S2$ est un multiple de 10.

$S1-S2 = 9+c_3+c_5+3\times(8+c_4)-0-c_3-c_5-3\times(1+c_4) = 9+24-0-3 = 30$

La différence $S1-S2$ étant un multiple de 10, les nombres S1 et S2 ont le même reste dans la division euclidienne par 10. L'erreur ne sera donc pas détectée grâce à la clé.

2) a. On note $S = c_1+c_3+c_5+a\times(c_2+c_4)$ et $S' = c_1+c_4+c_5+a\times(c_2+c_3)$ Si la clé ne détecte pas l'erreur cela signifie donc que :

$$S \equiv S'\ [10] \Leftrightarrow c_1+c_3+c_5+a\times(c_2+c_4) \equiv c_1+c_4+c_5+a\times(c_2+c_3)[10]$$
$$\Leftrightarrow c_3+ac_4 \equiv c_4+ac_3[10] \Leftrightarrow a(c_4-c_3)-(c_4-c_3) \equiv 0[10] \Leftrightarrow (c_4-c_3)(a-1) \equiv 0[10]$$

b.

P \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

D'après le tableau ci-contre, les entiers n cherchés sont donc 0,2,4,5,6 et 8.

c. Pour que l'erreur soit détectée il faut donc $a-1$ appartienne à $\{1,3,7,9\}$ Soit $\boldsymbol{a \in \{2,4,8\}}$