BAC BLANC - MARS 2018 - LYCEE SAINT-SERNIN

- Terminale S -

Mathématiques - OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4h - Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **7 POINTS**

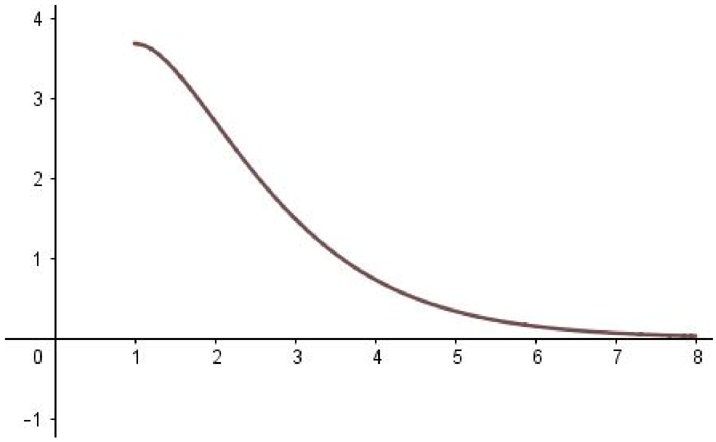
Commun à tous les candidats

PARTIE A - Recherche d'une fonction

On considère dans cette partie la courbe $\mathcal{C}$ représentant une fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} \quad \text{où a et b sont des } \textbf{entiers naturels}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b.

2. On souhaite que $3,5 < f(1) < 4$.
Déterminer la valeur de l'entier a.

PARTIE B - Etude de fonction

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10xe^{-x}$$

1. Démontrer que f admet le tableau de variations suivant :

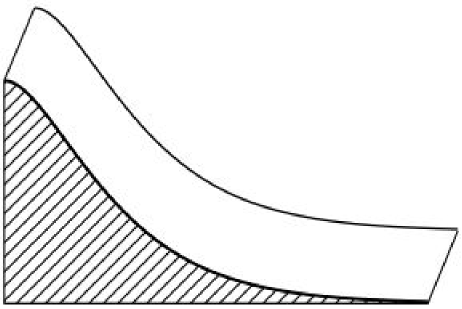
x	1	$+\infty$
f	$\frac{10}{e}$ ↘	0

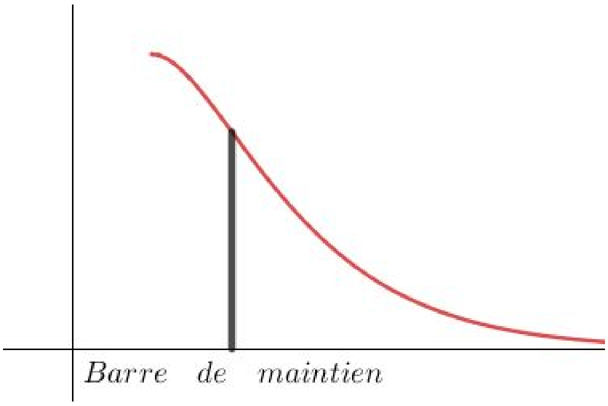
2. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote ? Justifier votre réponse.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x_0 sur $[1\,;+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.

PARTIE C - Modélisation

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas.
Il réalise le schéma de ce toboggan en perspective cavalière.

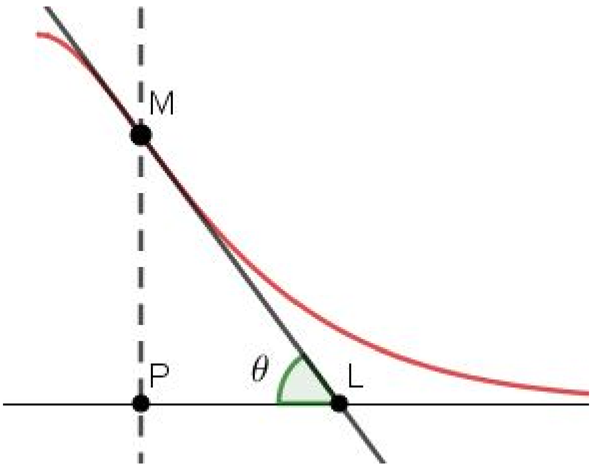




Le technicien de l'entreprise chargé de mettre en oeuvre ce projet pense modéliser le profil de ce toboggan par la fonction f étudiée dans la partie B, considérée sur $[1\ ;\ 8]$ dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.

1. Une barre verticale de maintien d'une hauteur de 2 mètres est prévue.
A quelle abscisse doit-on la positionner sur le profil ? En donner une valeur approchée au centimètre.

2. Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1.
On appelle θ l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle θ soit inférieur à 55 degrés.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$ et f'' la dérivée de f'.
On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$.
Etudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.

b. Soit a un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}$.
Justifier que $\tan\theta = |f'(a)|$.

c. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \qquad u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

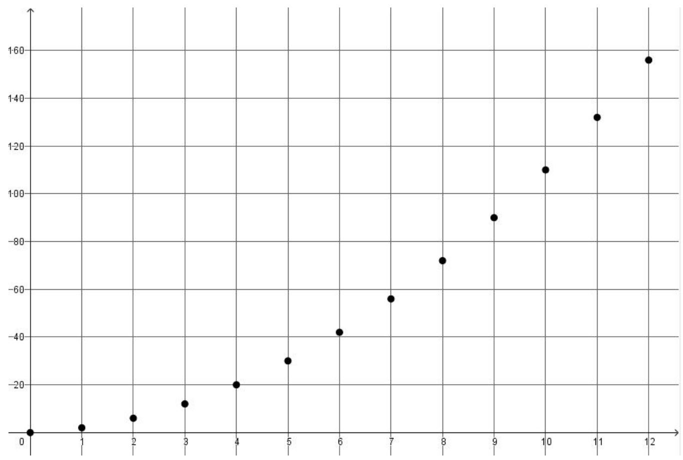
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants, où n désigne un entier naturel :

Algorithme 1	**Algorithme 2**
$u \leftarrow 0$ Pour i allant de 1 à n : $u \leftarrow u + 2i + 2$ Fin Pour	$u \leftarrow 0$ Pour i allant de 0 à $n-1$: $u \leftarrow u + 2i + 2$ Fin Pour

($a \leftarrow 10$ *signifie " a prend la valeur* 10")

De ces deux algorithmes, lequel permet d'obtenir après exécution de l'algorithme la valeur de u_n dans la variable u, pour un entier naturel n donné ?

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.



n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156

(a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

(b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. **Démonstration de la conjecture**
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

(b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 3 **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. *Un point M est dit* ***invariant*** lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants.
   Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Mettre ces affixes sous forme exponentielle puis montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entrainer seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
On appelle X le nombre de balles de cette série envoyées à droite.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
3. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité qu'une balle envoyée à droite soit liftée est $0,48$;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$.

On considère les évènements suivants :

D :" La balle est envoyée à droite."
L :" La balle envoyée est liftée."

1. Représenter la situation par un arbre pondéré que l'on complètera en cours d'exercice.
2. Démontrer que $P_{\overline{D}}(\overline{L}) = 0,470$.
3. Démontrer que $P(L) = 0,505$.
4. Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?
5. Les évènements L et D sont-ils indépendants ? Justifier.