BAC BLANC - Corrigé

TS **Lycée Saint Sernin**

EXERCICE 1

PARTIE A

1. On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Il faut donc que $f'(1) = 0$.
   Or f est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} + (ax+b) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(a - ax - b)$.
   Donc $f'(1) = 0 \iff \mathrm{e}^{-1}(a - a - b) = 0 \iff -b\mathrm{e}^{-1} = 0 \iff \boxed{b = 0}$, car $\mathrm{e}^{-1} \neq 0$.
2. Le haut de la courbe est obtenu pour $x = 1$. Or :
   $3,5 < f(1) < 4 \iff 3,5 < a\mathrm{e}^{-1} < 4 \iff 3,5\mathrm{e} < a < 4\mathrm{e}$.
   Or $3,5\mathrm{e} \approx 9,5$ et $4\mathrm{e} \approx 10,9$: le seul entier compris entre ces deux valeurs est $a = 10$.
   On a donc sur $[1\,;\,8]$: $\boxed{f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}}$.

PARTIE B

1.★ f est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$.
Posons :

$$u(x) = 10x \qquad u'(x) = 10$$
$$v(x) = e^{-x} \qquad v'(x) = -e^{-x}$$
$$f'(x) = 10e^{-x} - 10xe^{x} = 10(1-x)e^{-x}$$

Sur $[1\ ;\ +\infty[$, $1 - x \leq 0$ et $10e^{-x} > 0$ ainsi, $f'(x) \leq 0$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Ainsi, f est décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

★ $f(1) = 10 \times e^{-1} = \boxed{\dfrac{10}{e}}$

★ $\boxed{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0}$, par limite usuelle(croissances comparées).

2. C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$, car $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$

3. Sur $[1\ ;\ +\infty[$, f est **continue**, **strictement décroissante** et $2 \in [\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x)\ ;\ f(1)]$.

D'après le TVI, $f(x) = 2$ admet une unique solution $x_0 \in [1\ ;\ +\infty[$.
En utilisant la calculatrice, $\boxed{x_0 \approx 2,54}$

PARTIE C

1. La barre de soutien verticale mesurant 2m, l'abscisse x à laquelle on doit la placer doit vérifier $f(x) = 2$, c'est à dire $x = x_0$.
La barre doit être placée à une abscisse de $2,54$m soit $\boxed{254\ cm}$

2.a. La fonction f' est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle $[1\,;\,8]$:
$f''(x) = 10 \times (-1)\mathrm{e}^{-x} + 10(1-x) \times (-1)10\mathrm{e}^{-x} = 10\mathrm{e}^{-x}(-1 - 1 + x) = 10(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 2$.

- Si $1 \leqslant x < 2$, $x-2<0$: la fonction f' est donc strictement décroissante sur $[1\,;\,2[$;
- Si $2 < x \leqslant 8$, $x-2>0$: la fonction f' est donc strictement croissante sur $]2\,;\,8[$;
- Si $x=2$, $f'(2) = -10\mathrm{e}^{-2} \approx -1,35$ est donc le minimum de la fonction f' sur $[1\,;\,8]$.

b. Une équation de la tangente (T_M) au point $M(a\ ;\ f(a))$ est :
$P(x\ ;\ y) \in (T_M) \iff y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
Le point L est le point de cette droite d'ordonnée nulle donc son abscisse x vérifie :
$-f(a) = f'(a)(x-a) \iff x-a = \dfrac{-f(a)}{f'(a)} \iff \boxed{x = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}}$.
Dans le triangle MLP, on a :

$$\tan\theta = \frac{PM}{PL} = \frac{f(a)}{\left|a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} - a\right|} = \frac{f(a)}{\left|-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|} = |-f'(a)| = |f'(a)|$$

c. On a vu dans l'étude de la fonction f' que celle-ci décroit de
$f'(1) = 10(1-1)\mathrm{e}^{-1} = 0$ à $-1,35$ puis croissante de $f'(2)$ à $f'(8) = 10(1-8)\mathrm{e}^{-8} = -70\mathrm{e}^{-8} \approx -0,023$.
Le maximum de la fonction $|f'(x)|$ est donc $10e^{-2}$ soit environ $1,35 \approx \tan 53,47\ ^{\circ}$
Cette valeur est bien inférieure à la valeur $55\ ^{\circ}$. Le toboggan est conforme.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. $u_1 = u_0 + 2\times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 2 = 6$.
2. **Le second affiche en sortie la valeur de** u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur.
3. Étude de la suite (u_n) :
   (a) La suite (u_n) semble être croissante.
   Démonstration :
   $$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n+2 > 0 \text{ pour tout } n \text{ entier naturel}$$
   (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} u_0 = a\times 0^2 + b\times 0 + c = 0 \\ u_1 = a\times 1^2 + b\times 1 + c = 2 \\ u_2 = a\times 2^2 + b\times 2 + c = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=2 \\ 4a+2b=6 \\ c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=3 \\ c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n+2$.
   (a) C'est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $v_0 = 2$.
   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (n+1)v_0 + \frac{n(n+1)}{2}\times r = 2(n+1) + n(n+1) = \boxed{(n+1)(n+2)}$$

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

$$S_n = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + \cdots + (\cancel{u_n} - \cancel{u_{n-1}}) + (u_{n+1} - \cancel{u_n}) = u_{n+1} - u_0$$

$$S_{n-1} = u_n - u_0 \Longleftrightarrow u_n = S_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = \boxed{n(n+1)}$$

EXERCICE 3

1. $M(z)$ est invariant si $M' = M \iff z' = z \iff z^2 + 4z + 3 = z \iff z^2 + 3z + 3 = 0$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$.
Cette équation a deux solutions :
$z_1 = \boxed{\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$ et $z_2 = \boxed{\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$.

2. On a $|z_1|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3}$.
Le même calcul donne $|z_2| = \sqrt{3}$.
On a donc $z_1 = \dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$.
De plus, $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}$.
On a $z_{\mathrm{A}} = z_2$, donc $|z_{\mathrm{A}}| = \mathrm{OA} = |z_2| = \sqrt{3}$.
De même $z_{\mathrm{B}} = z_1$, donc $|z_{\mathrm{B}}| = \mathrm{OB} = |z_1| = \sqrt{3}$.
Enfin $\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}| = \left|\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - \left(\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$.
On a donc $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \sqrt{3}$: **le triangle OAB est un triangle équilatéral**.

3. Soit $M(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son point associé.
M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.
Or on sait que l'affixe du point M' est :
$z^2+4z+3 = (x+\mathrm{i}y)^2+4(x+\mathrm{i}y)+3 = x^2-y^2+2\mathrm{i}xy+4x+4\mathrm{i}y+3 = \boxed{x^2 - y^2 + 4x + 3 + \mathrm{i}(2xy + 4y)}$
On a donc :
$$y' = 0 \iff 2xy+4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ x+2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ x & = & -2 \end{array}\right.$$
L'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué des points d'ordonnée nulle donc de **l'axe des abscisses** et des points de la **droite verticale dont une équation est** $\boxed{x = -2}$.

EXERCICE 4

PARTIE A

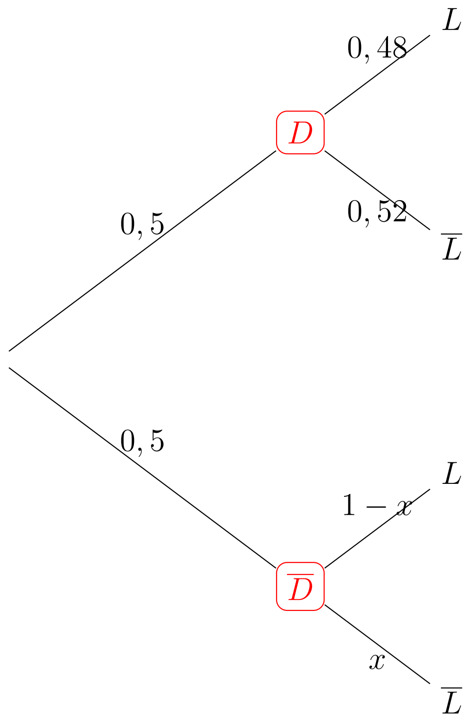
1. On reconnait ici un schéma de Bernoulli, consistant à répéter 20 **fois** de manière **indépendante** la même expérience de Bernoulli, dont la probabilité de succès est $P(S) = 0,5$.
(avec S :"La balle est envoyée à droite.")
X compte le nombre de balles envoyées à droite, donc **le nombre de succès**.
Ainsi X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$.

2. $P(X=10) \approx \boxed{0,176}$.
3.$P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4) \approx 0,588 - 0,0059 \approx \boxed{0,582}$

Ces résultats sont obtenus grâce aux touches dédiées de la calculatrice !

PARTIE B

1.



2.

$$P_{\overline{D}}(\overline{L}) = \frac{P(\overline{D} \cap \overline{L})}{\overline{D}} = \frac{0,235}{0,5} = \boxed{0,470}$$

3. D'après la formule des probabilités totales (D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers) :

$$P(L) = P(D)P_D(L) + P(\overline{D})P_{\overline{D}}(L) = 0,5 \times 0,48 + 0,5 \times 0,53 = \boxed{0,505}$$

4.

$$P_{\overline{L}}(D) = \frac{P(\overline{L} \cap D)}{P(\overline{L})} = \frac{0,52 \times 0,5}{0,495} = \boxed{0,525}$$

5. $P_D(L) = \boxed{0,48} \neq P(L) = \boxed{0,505}$ donc L et D ne sont **pas indépendants**.

Exercice 4 Spécialité

Partie A : ligne de transmission

1. a. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Son déterminant est : $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$ La matrice P est donc inversible.

L'inverse de la matrice P est alors : $P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & 1-2p \end{pmatrix}$

Donc $PDP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2p-1 & 1-2p+1 \\ 1+1-2p & 1-1+2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = A$

c. **Initialisation :** pour n=1 PD^1P^{-1}=A d'après le 1b) donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : supposons que pour un certain entier naturel n, on ait $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^nP^{-1}$,

$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}P^{-1}.(\mathrm{PD}^nP^{-1}) = \mathrm{PD}I_2\mathrm{D}^nP^{-1} = \mathrm{PDD}^nP^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}P^{-1}$ La propriété est vraie au rang n+1

Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n≥ 1.

d. D'après le logiciel de calcul formel on a : $X_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2p-1)^n + 1 \\ -(2p-1)^n + 1 \end{pmatrix}$ donc $q_n = \frac{1}{2}(-(2p-1)^n + 1)$

2. Si $p = 0{,}97$ on a $q_n = \frac{1}{2}(1-0{,}94^n)$

   On veut donc trouver la plus grande valeur de l'entier naturel n tel que : $\frac{1}{2}(1-0{,}94^n) \leq 0{,}25$

   Soit $1-0{,}94^n \leq 0{,}5 \iff -0{,}94^n \leq -0{,}5 \iff 0{,}94^n \geq 0{,}5$

   $(0{,}94^n)$ est une suite géométrique décroissante (car $0 < q = 0{,}94 < 1$) qui tend vers 0 car $-1 < q < 1$ Or, grâce à la calculatrice, $0{,}94^{11} \approx 0{,}5063$ $\quad 0{,}94^{12} \approx 0{,}4759$

   On peut donc aligner au maximum 11 lignes de transmission.

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7,4)

1. a. c_1, c_2 et c_3 sont des restes de division euclidienne par 2. Leurs valeurs ne peuvent donc être que 0 ou 1.

   b. $b2 + b3 + b4 = 2$ or $2 \equiv 0\ [2]$ donc $c1 = 0$

   $b1 + b3 + b4 = 2$ donc $c2 = 0$

   $b1 + b2 + b4 = 3$ or $3 \equiv 1\ [2]$ donc $c3 = 1$

   Ainsi la clé de contrôle associée au mot 1101 est 001.

2. Soit $b_1 b_2 b_3 b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.

   Si on change la valeur de b_1 en b'_1, on aura : $b'_1 \equiv b_1+1$ (mod 2).

   - la valeur de c_1 ne dépend pas de b_1 donc est inchangée;
   - $b'_1 + b_3 + b_4 \equiv b_1 + b_3 + b_4 + 1$ (mod 2) donc c_2 est modifiée;
   - $b'_1 + b_2 + b_4 \equiv b_1 + b_2 + b_4 + 1$ (mod 2) donc c_3 est modifiée

3.

	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	Aucun
c1	J	F	F	F	F	J	J	J
c2	F	J	F	F	J	F	J	J
c3	F	F	J	F	J	J	F	J

4. Les huit triplets du tableau (J;F;F), (F;J;F), ..., (J;J;J), sont tous différents. Quand on reçoit un message, on calcule les codes de contrôle et on les compare avec ceux qu'on a reçus. Selon le triplet obtenu, on sait donc quel est le bit erroné, s'il y en a un.

   Dans tous les cas on peut diagnostiquer l'erreur et la corriger.

5. $A = 1011111$

$b2 + b3 + b4 = 2$ donc $c1 = 0$

$b1 + b3 + b4 = 3$ donc $c2 = 1$

$b1 + b2 + b4 = 2$ donc $c3 = 0$

On a donc le triplet (F ;J ;F) L'erreur porte donc sur b2 et le message corrigé est 1111111

$B = 0010001$

$b2 + b3 + b4 = 1$ donc $c1 = 1$

$b1 + b3 + b4 = 1$ donc $c2 = 1$

$b1 + b2 + b4 = 0$ donc $c3 = 0$

On a donc le triplet (F ;F ;F) L'erreur porte donc sur b4 et le message corrigé est 0011001