Exercice 4 Spécialité

Partie A : ligne de transmission

1. a. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Son déterminant est : $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$ La matrice P est donc inversible.

L'inverse de la matrice P est alors : $P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b. $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & 1-2p \end{pmatrix}$

Donc $PDP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2p-1 & 1-2p+1 \\ 1+1-2p & 1-1+2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = A$

c. **Initialisation** : pour n=1 PD^1P^{-1}=A d'après le 1b) donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : supposons que pour un certain entier naturel n, on ait $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^nP^{-1}$,

$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}P^{-1}.(\mathrm{PD}^nP^{-1}) = \mathrm{PD}I_2\mathrm{D}^nP^{-1} = \mathrm{PDD}^nP^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}P^{-1}$ La propriété est vraie au rang n+1

Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel n≥ 1.

d. D'après le logiciel de calcul formel on a : $X_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2p-1)^n + 1 \\ -(2p-1)^n + 1 \end{pmatrix}$ donc $q_n = \frac{1}{2}(-(2p-1)^n + 1)$

2. Si $p = 0{,}97$ on a $q_n = \frac{1}{2}(1 - 0{,}94^n)$

   On veut donc trouver la plus grande valeur de l'entier naturel n tel que : $\frac{1}{2}(1 - 0{,}94^n) \leq 0{,}25$

   Soit $1 - 0{,}94^n \leq 0{,}5 \iff -0{,}94^n \leq -0{,}5 \iff 0{,}94^n \geq 0{,}5$

   $(0{,}94^n)$ est une suite géométrique décroissante (car $0 < q = 0{,}94 < 1$) qui tend vers 0 car $-1 < q < 1$ Or, grâce à la calculatrice, $0{,}94^{11} \approx 0{,}5063 \quad 0{,}94^{12} \approx 0{,}4759$

   On peut donc aligner au maximum 11 lignes de transmission.

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7,4)

1. a. c_1, c_2 et c_3 sont des restes de division euclidienne par 2. Leurs valeurs ne peuvent donc être que 0 ou 1.

   b. $b2 + b3 + b4 = 2$ or $2 \equiv 0\ [2]$ donc $c1 = 0$

   $b1 + b3 + b4 = 2$ donc $c2 = 0$

   $b1 + b2 + b4 = 3$ or $3 \equiv 1\ [2]$ donc $c3 = 1$

   Ainsi la clé de contrôle associée au mot 1101 est 001.

2. Soit $b_1 b_2 b_3 b_4$ un mot de 4 bits et $c_1c_2c_3$ la clé associée.

   Si on change la valeur de b_1 en b'_1, on aura : $b'_1 \equiv b_1+1$ (mod 2).

   • la valeur de c_1 ne dépend pas de b_1 donc est inchangée;

   • $b'_1 + b_3 + b_4 \equiv b_1 + b_3 + b_4 + 1$ (mod 2) donc c_2 est modifiée;

   • $b'_1 + b_2 + b_4 \equiv b_1 + b_2 + b_4 + 1$ (mod 2) donc c_3 est modifiée

3.

	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	Aucun
c1	J	F	F	F	F	J	J	J
c2	F	J	F	F	J	F	J	J
c3	F	F	J	F	J	J	F	J

4. Les huit triplets du tableau (J;F;F), (F;J;F), …, (J;J;J), sont tous différents. Quand on reçoit un message, on calcule les codes de contrôle et on les compare avec ceux qu'on a reçus. Selon le triplet obtenu, on sait donc quel est le bit erroné, s'il y en a un.

   Dans tous les cas on peut diagnostiquer l'erreur et la corriger.

5. $A = 1011111$

$b2 + b3 + b4 = 2$ donc $c1 = 0$

$b1 + b3 + b4 = 3$ donc $c2 = 1$

$b1 + b2 + b4 = 2$ donc $c3 = 0$

On a donc le triplet (F ;J ;F) L'erreur porte donc sur b2 et le message corrigé est 1111111

$B = 0010001$

$b2 + b3 + b4 = 1$ donc $c1 = 1$

$b1 + b3 + b4 = 1$ donc $c2 = 1$

$b1 + b2 + b4 = 0$ donc $c3 = 0$

On a donc le triplet (F ;F ;F) L'erreur porte donc sur b4 et le message corrigé est 0011001